Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 18 octobre 2012

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) $f_1'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-2)(x-1)$
Pour tout $x \in]1;2[$, $f_1'(x) < 0$ car $x - 2 < 0$ et $x - 1 > 0$. La fonction f_1 est donc strictement décroissante sur $[1;2]$. Elle réalise donc une bijection entre $[1;2]$ et $[f_1(2); f_1(1)] = [-1;0]$.

b) $f_2'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ donc, si $x \in]1;+\infty[$, $f_2'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$. La fonction f_2 est strictement croissante sur $[1;+\infty[$; elle réalise donc une bijection entre $[1;+\infty[$ et $[f_2(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)[$.

Lorsque $x \to +\infty$, $x - \ln x = x(1 - \frac{\ln x}{x})$. Or $\frac{\ln x}{x} \to 0$ (car $\frac{\ln x}{x} = ye^{-y}$ pour $y = \ln x \to +\infty$ et on sait que $\underset{y\to+\infty}{y} \; e^{-y} = 0$). Donc $x - \ln x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Puisque $f_2(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$, f_2 réalise une bijection entre $[1;+\infty[$ et $[1;+\infty[$.

c) $f_3'(x) = -\frac{\pi}{2} e^x \cos(\frac{\pi}{2}(1 - e^x))$
Lorsque $x \in]-\infty;0[$, $0 < e^x < 1$ donc $0 < \frac{\pi}{2}(1 - e^x) < \frac{\pi}{2}$ et $\cos(\frac{\pi}{2}(1 - e^x)) > 0$. Puisque $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty;0[$. La fonction f_3 est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
Lorsque $x \to -\infty$, $1 - e^x \to 1$ donc $\frac{\pi}{2}(1 - e^x) \to \frac{\pi}{2}$ et, puisque sin est continue, $f_3(x) \to \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. De plus, $f_3(0) = \sin(0) = 0$.
La fonction f_3 réalise donc une bijection entre $]-\infty;0]$ et $[f_3(0); -\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)[= [0;1[$.

2. a) C'est une conséquence du rappel 4, pour $a = -\infty$ et $b = +\infty$. On a alors $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\mu = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Pour $f(x) = x$, $\lambda = -\infty$ et $\mu = +\infty$. Pour $f(x) = e^x$, $\lambda = 0$ et $\mu = +\infty$. Pour $f(x) = \arctan(x)$, $\lambda = -\frac{\pi}{2}$ et $\mu = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 :

1. $\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

2. Par définition, la fonction arctan est la réciproque de tan, qui réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $]-\infty;+\infty[$. La dérivée de tan ne s'annule pas, puisque $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1$ pour tout x. La fonction réciproque arctan est donc dérivable (voir l'exercice 5 des TD des 27 et 28 septembre) et sa dérivée vaut :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que, puisque arctan est la fonction réciproque de tan, $\tan \circ \arctan(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Dans tout l'exercice, les notations de la forme $\epsilon_k(x)$ désignent des fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.

1.

$$\begin{aligned}
e^{x+x^2} &= 1 + (x + x^2) + \frac{(x+x^2)^2}{2} + \epsilon_1(x+x^2)(x+x^2)^2 \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{x^2 + 2x^3 + x^4}{2} + \epsilon_2(x)(x+1)^2x^2 \\
&= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \epsilon_3(x)x^2 \\
&= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + (x + \frac{x^2}{2} + \epsilon_3(x))x^2 \\
&= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \epsilon_4(x)x^2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-1} &= -(x+2) \times (1-x)^{-1} \\
&= -(x+2)(1 + x + x^2 + \epsilon_1(x)x^2) \\
&= -(2 + 3x + 3x^2 + x^3 + 2\epsilon_1(x)x^2 + \epsilon_1(x)x^3) \\
&= -(2 + 3x + 3x^2 + (x + 2\epsilon_1(x) + x\epsilon_1(x))x^2) \\
&= -2 - 3x - 3x^2 + \epsilon_2(x)x^2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= (1 - \frac{x^2}{2} + \epsilon_1(x)x^3)^2 \\
&= 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + \epsilon_1(x)^2x^6 + 2\epsilon_1(x)x^3 - \epsilon_1(x)x^5 \\
&= 1 - x^2 + (\epsilon_1(x)^2x^3 + 2\epsilon_1(x) - \epsilon_1(x)x^2)x^3 \\
&= 1 - x^2 + \epsilon_2(x)x^3
\end{aligned}$$

4. Ici, on utilise le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \\
&= x^2 + \epsilon_1(x)x^3
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sin(\ln(1+x)) &= \sin(x - \frac{x^2}{2} + \epsilon_1(x)x^2) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \epsilon_1(x)x^2 + \epsilon_2\left(x - \frac{x^2}{2} + \epsilon_1(x)x^2\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \epsilon_1(x)x^2\right)^2 \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \epsilon_1(x)x^2 + \epsilon_3(x)(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4} + \epsilon_1^2(x)x^4 + 2x^3\epsilon_1(x) - \epsilon_1(x)x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \left(\epsilon_1(x) + \epsilon_3(x)(1 - x + \frac{x^2}{4} + \epsilon_1^2(x)x^2 + 2x\epsilon_1(x) - \epsilon_1(x)x^2)\right)x^2 \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \epsilon_4(x)x^2
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
e^{x^2} - e^x &= e^{((x-1)+1)^2} - e^{(x-1)+1} \\
&= \exp(1 + 2(x-1) + (x-1)^2) - \exp(1 + (x-1)) \\
&= e(\exp(2(x-1) + (x-1)^2) - \exp(x-1)) \\
&= e(1 + 2(x-1) + (x-1)^2 \\
&\quad + \frac{(2(x-1) + (x-1)^2)^2}{2} + \epsilon_1(2(x-1) + (x-1)^2)(2(x-1) + (x-1)^2)^2 \\
&\quad - (1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \epsilon_2(x-1)(x-1)^2)) \\
&= e((x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(2(x-1) + (x-1)^2)^2}{2} \\
&\quad + \epsilon_3(x-1)(2(x-1) + (x-1)^2)^2 - \epsilon_2(x-1)(x-1)^2) \\
&= e\Big((x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{2} \\
&\quad + \epsilon_3(x-1)(4(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4) - \epsilon_2(x-1)(x-1)^2\Big) \\
&= e\Big((x-1) + \frac{5(x-1)^2}{2} \\
&\quad + (2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \epsilon_3(x)(4 + 4(x-1) + (x-1)^2) - \epsilon_2(x-1))(x-1)^2\Big) \\
&= e\big((x-1) + \frac{5(x-1)^2}{2} + \epsilon_4(x-1)(x-1)^2\big) \\
&= e(x-1) + \frac{5e(x-1)^2}{2} + \epsilon_4(x-1)(x-1)^2
\end{aligned}$$

Exercice 4 :
Comme dans l'exercice précédent, toutes les fonctions de la forme ϵ_k tendent vers 0 en 0.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x - x^2/2 + \epsilon_1(x)x^2} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - x/2 + \epsilon_1(x)x} - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}((1 - \frac{x}{2} + \epsilon_1(x)x)^{-1} - 1) \\
&= \frac{1}{x}((1 + \frac{x}{2} - \epsilon_1(x)x + (\frac{x}{2} - \epsilon_1(x)x)\epsilon_2(\frac{x}{2} - \epsilon_1(x)x)) - 1) \\
&= \frac{1}{x}(1 + \frac{x}{2} + \epsilon_3(x)x - 1) \\
&= \frac{1}{2} + \epsilon_2(x)
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \frac{1}{2}$.

2.

$$\begin{aligned}
(1+x)^{1/x} &= (\exp(\ln(1+x)))^{1/x} \\
&= \exp(\frac{1}{x}\ln(1+x)) \\
&= \exp(\frac{x + \epsilon_1(x)x}{x}) \\
&= \exp(1 + \epsilon_1(x))
\end{aligned}$$

Lorsque $x \to 0$, $1 + \epsilon_1(x) \to 1$ donc $f_2(x) \to \exp(1)$:

$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = e$$

3. On effectue un développement limité de cos et de exp en 0.

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \cos x}{1 - e^{x^2}} &= \frac{x^2/2 + \epsilon_1(x)x^2}{-x^2 + \epsilon_2(x^2)x^2} \\
&= \frac{1/2 + \epsilon_1(x)}{-1 + \epsilon_3(x)}
\end{aligned}$$

Quand $x \to 0$, $1/2 + \epsilon_1(x) \to 1/2$ et $-1 + \epsilon_3(x) \to -1$ donc :

$$\lim_{x\to 0} f_3(x) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 5 :

1. Initialisation : pour $n = 1$, c'est vrai, d'après l'énoncé.

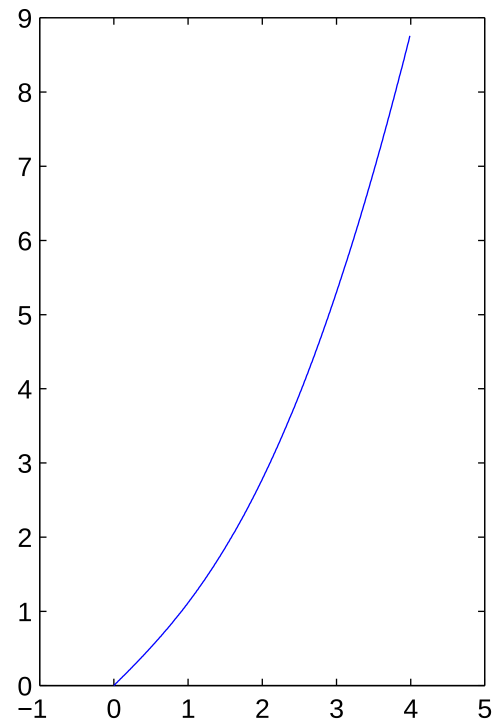
Récurrence : supposons que la propriété est vérifiée pour un certain $n \geq 1$. Montrons qu'elle est vérifiée pour $n+1$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ et puisque exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$, e^{-f} est de classe $\mathcal{C}^n$. De plus, la fonction $x \to x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La fonction $x \to x + e^{-f(x)}$ est donc de classe $\mathcal{C}^n$ (car c'est la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$). Cela signifie que sa dérivée d'ordre n existe et est continue. Puisque $f'(x) = x + e^{-f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée d'ordre n de f' existe et est continue. La dérivée d'ordre $n+1$ de f existe donc (il s'agit de la dérivée d'ordre n de f') et elle est continue. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
2. $f'(0) = 0 + e^{-f(0)} = 1$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 1 - f'(x)e^{-f(x)}$ donc $f''(0) = 1 - f'(0)e^{-f(0)} = 0$.
3. D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $h_x \in]0; x[$ tel que $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(h_x)\frac{x^3}{6}$.
Posons $\epsilon(x) = f'''(h_x)\frac{x}{6}$. Lorsque $x \to 0$, $h_x \to 0$ donc $\epsilon(x) \to f'''(0) \times \frac{0}{6} = 0$. On a donc, en 0 :

$$f(x) = x + \epsilon(x)x^2$$

Exercice 6 :
1. Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = x + e^{-f(x)} \geq e^{-f(x)} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. D'après la dernière propriété des rappelles, elle admet donc une limite (qui peut éventuellement être $+\infty$ mais pas $-\infty$ car, comme f est croissante, $f(x) \geq f(0)$ pour tout x et $f \not\to -\infty$).
2. Pour $x = 1$, l'inégalité est une égalité.
Soit $x > 1$. D'après le théorème des accroissement finis, il existe $c \in]1; x[$ tel que $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c)$
Or $f'(c) = c + e^{-f(c)} \geq c > 1$ donc $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \geq 1$.
Puisque $x-1 > 0$, on peut multiplier la dernière inégalité par $(x-1)$ et on obtient $f(x) - f(1) \geq x - 1$, donc $f(x) \geq x - 1 + f(1)$.
Puisque $x - 1 + f(1) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x) - x = e^{-f(x)} \geq 0$.
D'après la question 2., pour tout $x \geq 1$, $h'(x) = e^{-f(x)} \leq e^{-(x-1+f(1))} = e^{-(x+c)}$.
4. La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive. Elle admet donc une limite en $+\infty$, qui peut être finie ou valoir $+\infty$.
Posons $g(x) = h(x) + e^{-(x+C)}$. La fonction g est dérivable et, pour tout $x \geq 1$, $g'(x) = h'(x) - e^{-(x+C)} \leq 0$. Cette fonction est donc décroissante sur $[1; +\infty[$. En particulier, pour tout $x \geq 1$, $h(x) \leq h(x) + e^{-(x+C)} \leq h(1) + e^{-(1+C)}$. La fonction h est donc bornée et h ne peut pas tendre vers une limite infinie. Elle converge donc vers une limite finie.
Posons $\epsilon(x) = h(x) - l$. On a $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + h(x) = \frac{x^2}{2} + l + \epsilon(x)$$

5.


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3
4
5