TD : Fonctions

Exercice 1 :

Rappels :

Pour tous a et b dans $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b) \quad \ln(a) - \ln(b) = \ln(a/b)$

Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$: $e^a \times e^b = e^{a+b} \quad e^a/e^b = e^{a-b} \quad 1/e^a = e^{-a}$

1. Indiquer, parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont égales :

$$e^2e^x \quad 2e^x \quad e^{2x} \quad e^{x^2} \quad e^{x+\ln(2)} \quad e^{x-\ln(2)} \quad (e^x)^2 \quad e^{x+2}$$

2. Soient $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x-1})$ et $g(x) = e^{2x} - 2e^x + 2$. Calculer $f \circ g(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 2 :

On pose :

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4}$$

1. Montrer que les points (x, y) tels que $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2. En déduire le domaine de définition de f. Le dessiner.
3. Calculer les dérivées partielles de f.
4. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $\left(1, 4, \frac{1}{3}\right)$.
5. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Le théorème de Schwarz est-il vérifié ?

Exercice 3 : [Décembre 2007]

On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.

b) Déterminer l'image $J = f(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par f et montrer que f admet une application réciproque $g = f^{-1}$ définie sur J.

c) Déterminer la dérivée de la fonction g.

d) Expliciter $g(y)$ en résolvant par rapport à x l'équation $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Retrouver la valeur de $g'(y)$.

e) Montrer que $|g(\frac{1}{10}) - \frac{1}{10}| < \frac{1}{900}$.

Exercice 4 : [Septembre 2005]

1. Trouver le domaine de définition et calculer la dérivée de la fonction $x \to \ln \frac{1+x}{1-x}$.
2. Trouver une fonction non-nulle z définie sur l'intervalle $]-1;1[$ et qui est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)z' = 2z$.
3. Trouver les solutions sur $]-1;1[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - 2y = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$. On pourra poser $y(x) = c(x)z(x)$ où z est la solution trouvée en 2.
4. Pour quelle valeur de la constante la solution trouvée est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 5 : [Difficile]
1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c \in [0;x]$ (ou $[x;0]$ si $x < 0$) tel que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n e^c}{n!}$$

c) Montrer que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}$.
2. En utilisant les questions précédentes, on va montrer que e est irrationnel, c'est-à-dire qu'il ne s'écrit pas sous la forme $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $e = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n!}$.
b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n!} < e$.
c) Montrer que, pour tous $n \geq 1$, $k \geq 2$, $\frac{1}{(n+1)!} + ... + \frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{n!}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^k})$. En déduire que, pour tout n, $e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{2}{n!}$.
d) On raisonne par l'absurde et on suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$q! + q! + \frac{q!}{2} + ... + \frac{q!}{(q-1)!} + 1 < p(q-1)! < q! + q! + \frac{q!}{2} + ... + \frac{q!}{(q-1)!} + 2$$

e) Montrer que tous les termes qui interviennent dans la double inégalité de la question d) sont entiers. En déduire une contradiction.