Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 20 décembre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. $e^2e^x = e^{x+2}$
$2e^x = e^{\ln(2)}e^x = e^{x+\ln(2)}$
$e^{2x} = e^{x+x} = e^x.e^x = (e^x)^2$

2.

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= \ln(1 + \sqrt{g(x) - 1}) \\ &= \ln(1 + \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1}) \\ &= \ln(1 + \sqrt{(e^x - 1)^2}) \\ &= \ln(1 + e^x - 1) \\ &= \ln(e^x) = x \end{aligned}$$

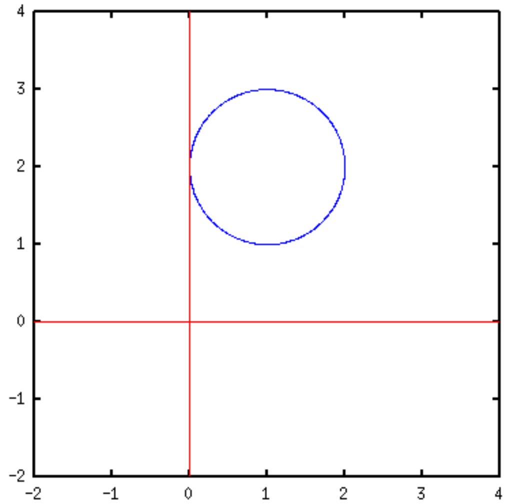
On a pu écrire $\sqrt{(e^x-1)^2} = e^x - 1$ car $x \geq 0$ donc $e^x - 1 \geq e^0 - 1 = 0$.

Exercice 2 :

1. $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ donc :

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $(1, 2)$ et de rayon $\sqrt{1} = 1$.
2. La fonction f est définie en (x, y) si $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 \neq 0$. Elle est donc définie en tous les points qui n'appartiennent pas au cercle de centre $(1, 2)$ et de rayon 1.



3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-\frac{\partial(x^2-2x+y^2-4y+4)}{\partial x}}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2} = \frac{2(1-x)}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial(x^2-2x+y^2-4y+4)}{\partial y}}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2} = \frac{2(2-y)}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2}$
On a utilisé le fait que, pour toute fonction u, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
4. L'équation est $z = f(1,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,4)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,4)(y-4)$. Calculons ce qui est nécessaire :

$$f(1,4) = \frac{1}{1^2 - 2.1 + 4^2 - 4.4 + 4} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = \frac{2(1-1)}{(1^2 - 2.1 + 4^2 - 4.4 + 4)^2} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = \frac{2(2-4)}{(1^2 - 2.1 + 4^2 - 4.4 + 4)^2} = \frac{-4}{9}$$

Remarque : la valeur $f(1,4) = \frac{1}{3}$ était donnée. Ce n'était pas la peine de la recalculer.
On obtient donc comme équation :

$$z = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}(y-4)$$

soit :

$$9z + 4y = 19$$

5.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2(2-y)}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2}\right) \\
&= 2(2-y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2}\right) \\
&= 2(2-y)\frac{-2\frac{\partial(x^2-2x+y^2-4y+4)}{\partial x}}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^3} \\
&= \frac{8(2-y)(1-x)}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2(1-x)}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2}\right) \\
&= 2(1-x)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^2}\right) \\
&= 2(1-x)\frac{-2\frac{\partial(x^2-2x+y^2-4y+4)}{\partial y}}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^3} \\
&= \frac{8(2-y)(1-x)}{(x^2-2x+y^2-4y+4)^3}
\end{aligned}$$

On a utilisé, à chaque fois, le fait que, pour toute fonction u, $\left(\frac{1}{u^2}\right)' = -\frac{2u'}{u^3}$ (formule qui s'obtient en remarquant que $\frac{1}{u^2}$ est la composée de u et de $x \to x^{-2}$ puis en appliquant la formule de dérivation des fonctions composées).
Le théorème de Schwarz est vérifié puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 3 :

a)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x}) - (e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1-(f(x))^2 &= 1-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}-\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

Donc $f'(x)=1-(f(x))^2$.

b) La fonction f' est strictement positive (c'est le quotient de deux fonctions strictement positives) donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x/e^{-x}-1}{e^x/e^{-x}+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1 \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}/e^x}{1+e^{-x}/e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1-0}{1+0}=1
\end{aligned}$$

La fonction f est strictement croissante et continue (car c'est le quotient de deux fonctions continues et car le dénominateur ne s'annule pas) sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J=]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)[=]-1;1[$.

La fonction f admet une réciproque f^{-1} sur J car elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers J.

c) La dérivée de f ne s'annule pas, comme on l'a vu en b), donc $g=f^{-1}$ est dérivable et sa dérivée vaut :

$$g'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{1-(f(f^{-1}(x)))^2}$$

On a utilisé l'égalité démontrée en a).

Puisque f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre, $f(f^{-1}(x))=x$ pour tout $x\in J$ donc $g'(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

d) Posons $x=g(y)$. Alors $f(x)=f(g(y))=f(f^{-1}(y))=y$ donc $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Calculons x.

$$\begin{aligned}
y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}&=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\
\Rightarrow y(e^{2x}+1)&=e^{2x}-1 \\
\Rightarrow y+1&=e^{2x}(1-y) \\
\Rightarrow e^{2x}&=\frac{y+1}{1-y} \\
\Rightarrow x&=\frac{1}{2}\ln(\frac{y+1}{1-y})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{y+1}{1-y}\right)' \frac{1}{(y+1)/(1-y)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1-y)-(y+1).(-1)}{(1-y)^2}\frac{1-y}{y+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{(1-y)^2}\frac{1-y}{1+y} \\
&= \frac{1}{(1-y)(1+y)} = \frac{1}{1-y^2}
\end{aligned}
$$

e) Posons $h(x) = g(x) - x$ pour tout $x \in J$. La fonction h est continue et dérivable sur $[0; \frac{1}{10}]$. Sa dérivée vaut $h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0; \frac{1}{10}[$ tel que :

$$
\frac{h(1/10) - h(0)}{1/10 - 0} = h'(c) = \frac{c^2}{1-c^2}
$$

Or $\frac{g(1/10)-h(0)}{1/10-0} = \frac{g(1/10)-1/10-g(0)}{1/10}$ et $g(0) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{1}) = 0$ donc $\frac{h(1/10)-h(0)}{1/10-0} = 10(g(\frac{1}{10}) - \frac{1}{10})$.
Donc, en utilisant le fait que $0 < c < 1/10$:

$$
\begin{aligned}
|g(\frac{1}{10}) - \frac{1}{10}| &= \frac{1}{10}|\frac{h(1/10)-h(0)}{1/10-0}| \\
&= \frac{1}{10}|h'(c)| \\
&= \frac{1}{10}\frac{c^2}{1-c^2} \\
&< \frac{1}{10}\frac{(1/10)^2}{1-c^2} \\
&< \frac{1}{10}\frac{(1/10)^2}{1-(1/10)^2} \\
&= \frac{1}{990} < \frac{1}{900}
\end{aligned}
$$

Une autre possibilité aurait été d'appliquer à g le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, en 0, en utilisant le fait que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ et en trouvant une majoration de $g''(c)$ pour $c \in]0; 1/10[$.

Exercice 4 :

1. Posons $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ lorsque ce nombre est défini. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est définie en x si et

seulement si $\frac{1+x}{1-x}$ est défini et strictement positif, c'est-à-dire :

$$1 - x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } 1 + x > 0; 1 - x > 0 \text{ ou } 1 + x < 0; 1 - x < 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 1 \text{ et } x > -1; x < 1 \text{ ou } x < -1; x > 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow x \in]-1; 1[$$

La fonction f est donc définie sur $]-1;1[$.
Sur $]-1;1[$, $1+x > 0$ et $1-x > 0$ donc $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$.
2. On cherche une solution de l'équation différentielle $z' = \frac{2}{1-x^2}z$. D'après la question 1., la fonction f est une primitive de $x \to \frac{2}{1-x^2}$ sur $]-1;1[$. La fonction $z(x) = \exp(f(x)) = \exp(\ln\frac{1+x}{1-x}) = \frac{1+x}{1-x}$ est donc solution de l'équation sur $]-1;1[$.
3. Cherchons toutes les solutions de l'équation différentielle donnée. Soit y une solution quelconque. Puisque z ne s'annule pas sur $]-1;1[$, la fonction $c(x) = y(x)/z(x)$ est bien définie sur $]-1;1[$. Elle est continue et dérivable car c'est un quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a :

$$y' = c'z + cz'$$

Puisque $(1 - x^2)z' = 2z$

$$\begin{aligned}
0 &= (1 - x^2)y' - 2y - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \\
&= (1 - x^2)c'z + c(1 - x^2)z' - 2cz - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \\
&= (1 - x^2)c'z - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + c((1 - x^2)z' - 2z) \\
&= (1 - x^2)c'z - \frac{(1+x)^2}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Donc $c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)z}\frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x)^2}\frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)$.
Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-1;1[$, $c(x) = C + \arctan(x)$ et :

$$y(x) = c(x)z(x) = \arctan(x)\frac{1+x}{1-x} + C\frac{1+x}{1-x}$$

De plus, si $y(x) = \arctan(x)\frac{1+x}{1-x} + C\frac{1+x}{1-x}$ pour un $C \in \mathbb{R}$ quelconque, y est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
(1 - x^2)y'(x) &= (1 - x^2)(\frac{1}{1+x^2}\frac{1+x}{1-x} + \arctan(x)\frac{2}{(1-x)^2} + \frac{2C}{(1-x)^2}) \\
&= \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + 2\arctan(x)\frac{1+x}{1-x} + 2C\frac{1+x}{1-x} \\
&= \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + 2y(x)
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc exactement les fonctions de la forme $y(x) = \arctan(x)\frac{1+x}{1-x} + C\frac{1+x}{1-x}$, pour $C \in \mathbb{R}$.

4. $y(x) = \frac{(1+x)(\arctan(x)+C)}{1-x}$. Lorsque $x \to 1$, $1-x \to 0$ donc, si $(1+x)(\arctan(x)+C)$ a une limite non-nulle, $y(x) \to \pm\infty$.

Pour qu'on puisse prolonger y par continuité, il faut donc que $(1+x)(\arctan(x)+C)$ tende vers 0 en 1. La fonction $x \to (1+x)(\arctan(x)+C)$ est continue donc, en 1, cette fonction tend vers $2(\arctan(1)+C)$. Il faut donc qu'on ait $C = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$.

On vient de démontrer que, si y se prolonge par continuité en 1, $C = -\frac{\pi}{4}$. Montrons maintenant la réciproque : si $C = -\frac{\pi}{4}$, y se prolonge par continuité en 1.

Lorsque $x \to 1$, en revenant à la définition de la dérivée d'arctan :

$$\frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4}}{1-x} = -\frac{\arctan(x) - \arctan(1)}{x-1} \to -\arctan'(1) = -\frac{1}{1+1^2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{1+x} \to \frac{1}{2}$$

Donc $y(x)$ tend vers $\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ quand x tend vers 1 et se prolonge bien par continuité en 1.

Exercice 5 :

1. a) Soit N un entier strictement positif au moins égal à $2|x|$. Pour tout $m \geq N$, $\frac{|x|}{m} \leq \frac{|x|}{N} \leq \frac{1}{2}$. Donc, pour tout $n \geq N$:

$$\frac{|x^n|}{n!} = \frac{|x|^N |x|^{n-N}}{N!(N+1)...n} = \frac{|x|^N}{N!}\frac{|x|}{N+1}...\frac{|x|}{n} \leq \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

Or, quand $n \to +\infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \to 0$ donc $\frac{|x^n|}{n!} \to 0$, ce qui implique que $\frac{x^n}{n!} \to 0$.

b) C'est le théorème de Taylor-Lagrange à l'ordre n. On utilise le fait que la dérivée k-ième de e^x est e^x pour tout k et, en particulier, que toutes les dérivées en 0 valent 1.

c) D'après le b), pour tout n et pour tout x, il existe $c \in [0; x]$ tel que :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n e^c}{n!}$$
$$\Rightarrow \left|e^x - (1 + x + ... + \frac{x^n}{n!})\right| = \left|\frac{x^n}{n!}(e^c - 1)\right|$$

Or $|e^c - 1| \leq 1$ si $x < 0$ (car alors $0 < e^c \leq 1$) et $|e^c - 1| \leq e^x$ si $x \geq 0$. Donc, dans tous les cas, $|e^c - 1| \leq \max(1, e^x)$ et :

$$\left|e^x - (1 + x + ... + \frac{x^n}{n!})\right| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right| \max(1, e^x) \to 0$$

Donc $e^x - (1 + x + ... + \frac{x^n}{n!}) \to 0$, ce qui est équivalent à :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} 1 + x + ... + \frac{x^n}{n!}$$

2. a) On applique le 1.c) pour $x = 1$.

b) Posons $u_n = 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!}$. Puisque tous les $\frac{1}{k!}$ sont strictement positifs, u_n est strictement croissante et, pour tout n, $e = \lim\limits_{k \to +\infty} u_k > u_n = 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!}$.

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)!} + ... + \frac{1}{(n+k)!} &= \frac{1}{n!}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+1)...(n+k)}) \\
&< \frac{1}{n!}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{(n+1)^k}{)} \\
&\leq \frac{1}{n!}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \lim_{m \to +\infty} 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m!} \\
&= 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{(n+1)!} + ... + \frac{1}{m!} \\
&\leq 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} + \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{m-n}}) \\
&\leq 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{2^{m-n}}) \\
&\leq 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{2^{m-n}}) \\
&= 1 + 1 + ... + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}
\end{aligned}$$

On a seulement démontré l'inégalité large. On veut une inégalité stricte. En utilisant le résultat qu'on vient de montrer pour $n + 2$ au lieu de n :

$$\begin{aligned}
e &\leq 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{2}{(n+2)!} \\
&= 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\frac{2}{n+2} \\
&< 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} \\
&= 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}\frac{2}{n+1} \\
&\leq 1 + 1 + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + ... + \frac{2}{n!}
\end{aligned}$$

On a maintenant démontré l'inégalité stricte.

d) D'après les questions b) et c) :

$$1 + 1 + ... + \frac{1}{q!} < e = \frac{p}{q} < 1 + 1 + ... + \frac{2}{q!}$$

On multiplie chaque terme par $q!$ et on obtient, en utilisant le fait que $\frac{p}{q}q! = p(q-1)!$:

$$q! + q! + \frac{q!}{2} + ... + \frac{q!}{(q-1)!} + 1 < p(q-1)! < q! + q! + ... + \frac{q!}{(q-1)!} + 2$$

e) Pour tout $k \leq q$, $\frac{q!}{k!} = (k+1)(k+2)...(q-1)q$ donc $\frac{q!}{k!}$ est entier.
Posons $\alpha = q! + q! + \frac{q!}{2} + ... + \frac{q!}{(q-1)!} + 1$. Puisque α est une somme d'entiers, c'est un entier et il vérifie :

$$\alpha < p(q-1)! < \alpha + 1$$

Il existe donc un entier, $p(q-1)!$, entre les deux entiers consécutifs α et $\alpha + 1$. C'est impossible donc l'hypothèse selon laquelle e est rationnel est absurde.