TD : Fonctions

Exercice 1 :

Rappel : si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ si et seulement si f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

1. On va démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toutes fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
a) Initialisation : démontrer la propriété pour $n = 0$.
b) Récurrence : on suppose que la propriété est vraie pour n, on veut la démontrer pour $n + 1$. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ quelconques ; il faut montrer que $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que $f + g$ est dérivable et donner sa dérivée.
c) En utilisant l'hypothèse de récurrence pour des fonctions bien choisies, montrer que $(f + g)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et en déduire que $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

2. On va démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toutes fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, fg est de classe $\mathcal{C}^n$.
a) Initialisation : démontrer la propriété pour $n = 0$.
b) Récurrence : on suppose que la propriété est vraie pour n, on veut la démontrer pour $n + 1$. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ quelconques ; il faut montrer que fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Montrer que fg est dérivable et donner sa dérivée.
c) En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence pour des fonctions bien choisies, montrer que $(fg)'$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et en déduire que fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

3. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toutes fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Exercice 2 :

Calculer les développements limités à l'ordre 2 des fonctions suivantes au voisinage des points demandés.

$f_1 : x \to \ln(x)$	en 1
$f_2 : x \to \frac{e^x}{x}$	en 1
$f_3 : x \to 2^x$	en -1
$f_4 : x \to \sqrt{x^2 - 3x + 3}$	en 2
$f_5 : x \to \cos(x)$	en $\frac{\pi}{4}$

Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles indiqués.

(1)	$f'(x) = e^x f(x)$	sur $\mathbb{R}$
(2)	$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2} f(x)$	sur $\mathbb{R}$
(3)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$	sur $\mathbb{R}_+^*$
(4)	$f''(x) - \frac{23}{2} f'(x) + 28 f(x) = 0$	sur $\mathbb{R}$
(5)	$f''(x) + 4f'(x) + 13f(x) = 0$	sur $\mathbb{R}$
(6)	$9f''(x) - 6f'(x) + f(x) = x^2 - 11x + 13$	sur $\mathbb{R}$
(7)	$f''(x) - 3f'(x) - 10f(x) + (12x - 11)e^x = 0$	sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 : [Examen de juin 2008]
a) Calculer la dérivée de la fonction :

$$\phi(x) = \ln(\cos(x)), x \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

b) Trouver la solution générale sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle

$$y' + \tan(x) y = \tan(x)$$

Exercice 5 :
1. Calculer les dérivées partielles de chacune des deux fonctions suivantes :

(1)	$f(x, y) = (x + y)^2$	pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
(2)	$f(x, y) = \sin(x/y)$	pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

2. Donner l'équation du plan tangent à la deuxième fonction en $(x, y) = (\frac{\pi}{4}, 1)$.

Exercice 6 :
Considérons l'équation différentielle $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$, avec $a \neq 0$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'y a pas d'autres solutions à cette équation que celles que vous avez vues en cours.
Notons r_1 et r_2 les racines (éventuellement confondues) du polynôme aX^2+bX+x. On supposera qu'elles sont réelles mais, en réalité, la démonstration est aussi valable si elles sont complexes.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle. On pose $g(x) = f(x)e^{-r_1 x}$. Calculer f, f' et f'' en fonction de g, g', g''. En déduire que g vérifie l'équation différentielle $ag''(x) + (2ar_1 + b)g'(x)$.
2. En posant $h = g'$, résoudre cette équation (traiter deux cas : $2ar_1 + b = 0$ et $2ar_1 + b \neq 0$).
3. Montrer que les racines r_1 et r_2 sont confondues si et seulement si $2ar_1 + b = 0$.
4. Montrer que, si $r_1 \neq r_2$, la fonction f est de la forme $\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et que, si $r_1 = r_2$, f est de la forme $(\lambda + \mu x)e^{r_1 x}$.