Université Pierre et Marie Curie — Le 22 novembre 2012
LM110 — http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$, cela signifie qu'elles sont continues. Puisque une somme de fonctions continues est continue, $f+g$ est continue, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^0$.

b) Puisque f et g sont $n+1$ fois dérivables (car elles sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$) et puisque $n+1 \geq 1$, elles sont au moins une fois dérivables. La fonction $f+g$ est donc la somme de deux fonctions dérivables, donc $f+g$ est dérivable et sa dérivée vaut $(f+g)' = f'+g'$.

c) Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$ (d'après le rappel). Donc $f'+g'$ est la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. D'après la propriété de récurrence, la somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Donc $(f+g)' = f'+g'$ est de classe $\mathcal{C}^n$. D'après le rappel, $f+g$ est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

2. a) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$, cela signifie qu'elles sont continues. Puisqu'un produit de fonctions continues est continue, fg est continue, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^0$.

b) Puisque f et g sont $n+1$ fois dérivables (car elles sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$) et puisque $n+1 \geq 1$, elles sont au moins une fois dérivables. La fonction fg est donc le produit de deux fonctions dérivables, donc fg est dérivable et sa dérivée vaut $(fg)' = f'g + fg'$.

c) Puisque f et g sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$ (d'après le rappel).
La fonction g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Elle est donc aussi de classe $\mathcal{C}^n$. D'après l'hypothèse de récurrence, puisque f' et g sont de classe $\mathcal{C}^n$, $f'g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
De même, d'après l'hypothèse de récurrence, puisque f et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$, fg' est de classe $\mathcal{C}^n$.
La somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (d'après la question 1.) donc $(fg)' = f'g + gf'$ est de classe $\mathcal{C}^n$. D'après le rappel, cela implique que fg est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

3. On procède par récurrence sur n.
Initialisation : si f et g sont de classe $\mathcal{C}^0$, c'est-à-dire continues, alors $f \circ g$ est continue, c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^0$.
Récurrence : on suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \geq 0$. On va montrer qu'elle est aussi vraie pour $n+1$. Soient f et g deux fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Puisque $n+1 \geq 1$, f et g sont dérivables. Comme la composée de deux fonctions dérivables est dérivable, $f \circ g$ est dérivable et sa dérivée vaut $(f \circ g)' = g'(f' \circ g)$.
La fonction f' est de classe $\mathcal{C}^n$ et g aussi (car g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$). D'après l'hypothèse de récurrence, la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ donc $f' \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

De plus, g' est de classe $\mathcal{C}^n$ et, d'après la question 2., le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, donc $(f \circ g)' = g'(f' \circ g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$.
La fonction $f \circ g$ est donc dérivable et admet une dérivée de classe $\mathcal{C}^n$. D'après le rappel, elle est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
On a donc démontré que, si la propriété était vraie au rang n, elle l'était aussi au rang $n+1$. Puisqu'elle est vraie pour $n = 0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

1. $\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\epsilon(x-1)$

2. $$\begin{aligned}\frac{e^x}{x} &= \frac{e^{1+(x-1)}}{1+(x-1)} \\ &= e \times e^{x-1} \times \frac{1}{1+(x-1)} \\ &= e(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\epsilon(x-1))(1 - (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1)) \\ &= e(1 - (x-1) + (x-1)^2 + (x-1) - (x-1)^2 + \frac{(x-1)^2}{2} + (x-1)^2\epsilon(x-1)) \\ &= e + \frac{e}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\epsilon(x-1)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}2^x &= \exp(x\ln(2)) \\ &= \exp(-\ln(2) + (x+1)\ln(2)) \\ &= \exp(-\ln(2))\exp(\ln(2)(x+1)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \ln(2)(x+1) + \frac{(\ln(2)(x+1))^2}{2} + (x+1)^2\epsilon(x+1)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2}(x+1) + \frac{(\ln(2))^2}{4}(x+1)^2 + (x+1)^2\epsilon(x+1)\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\sqrt{x^2-3x+3} &= \sqrt{(2+(x-2))^2 - 3(2+(x-2)) + 3} \\ &= \sqrt{4 + 4(x-2) + (x-2)^2 - 6 - 3(x-2) + 3} \\ &= \sqrt{1 + (x-2) + (x-2)^2}\end{aligned}$$

Le développement limité de $\sqrt{1+X}$ est $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + X^2\epsilon(X)$. On pose $X = (x-2) + (x-2)^2$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-3x+3} &= \sqrt{1 + (x-2) + (x-2)^2} \\ &= 1 + \left(\frac{(x-2) + (x-2)^2}{2}\right) - \frac{((x-2) + (x-2))^2}{8} + (x-2)^2\epsilon(x-2) \\ &= 1 + \frac{x-2}{2} + \frac{3(x-2)^2}{8} + (x-2)^2\epsilon(x-2)\end{aligned}$$

5. On va commencer par calculer le développement limité de $\cos(\frac{\pi}{4}+y)$ en 0, en utilisant le théorème de Taylor-Young. Posons $f(y)=\cos(\frac{\pi}{4}+y)$. On a :

$$\begin{aligned} f'(y) &= -\sin(\frac{\pi}{4}+y) \\ f''(y) &= -\cos(\frac{\pi}{4}+y) \end{aligned}$$

Donc $f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f''(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
D'après le théorème de Taylor-Young :

$$\cos(\frac{\pi}{4}+y)=f(y)=f(0)+yf'(0)+\frac{f''(0)}{2}y^2+y^2\epsilon(y)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{\sqrt{2}}{4}y^2+y^2\epsilon(y)$$

donc

$$\cos(x)=\cos(\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4}))=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2+(x-\frac{\pi}{4})^2\epsilon(x-\frac{\pi}{4})$$

Exercice 3 :

1. Une primitive de e^x est e^x. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x)=\lambda e^{e^x} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

2. Une primitive de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}=\frac{(\sin(x)+2)'}{\sin(x)+2}$ est $\ln(\sin(x)+2)$. Les solutions de l'équation différentielle sont dons les fonctions de la forme :

$$f(x)=\lambda\exp(\ln(\sin(x)+2))=\lambda(\sin(x)+2) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

3. Une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ est $\sqrt{x}$. Les solutions de l'équation homogène $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)$ sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x)=\lambda e^{\sqrt(x)} \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation de l'énoncé. Conformément à la méthode de la variation de la constante, on la cherche sous la forme $f(x)=K(x)e^{\sqrt{x}}$. On a alors :

$$f'(x)=K'(x)e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}K(x)e^{\sqrt{x}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \\ &= K'(x)e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}K(x)e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}K(x)e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \\ &= K'(x)e^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

On trouve $K'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Une solution possible est $K(x) = \sqrt{x}$, ce qui donne la solution particulière $f(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$.
Les solutions sont toutes la somme de la solution particulière trouvée et d'une solution de l'équation homogène associée, ce qui nous donne pour solutions les fonctions de la forme :

$$f(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + \lambda e^{\sqrt{x}} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

4. Le polynôme associée à cette équation est $X^2 - \frac{23}{2}X + 28$. On a $\Delta = \frac{23^2}{4} - 4.28 = \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$. Les racines sont donc :

$$x_1 = 8 \qquad\qquad x_2 = \frac{7}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda e^{8x} + \mu e^{7x/2} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

5. Le polynôme associée à cette équation est $X^2 + 4X + 13$. On a $\Delta = 4^2 - 4.13 = -36$. Les racines sont donc complexes :

$$x_1 = -2 + 3i \qquad\qquad x_2 = -2 - 3i$$

Les solutions de l'équation différentielle sont dons les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^{-2x}(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

6. Résolvons d'abord l'équation homogène $9f''(x) - 6f'(x) + f(x)$. Son polynôme caractéristique est $9X^2 - 6X + 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 0$. Il a une seule racine, $x_1 = 1/3$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = (\lambda + \mu x)\, e^{x/3}$$

Trouvons maintenant une solution particulière. Puisque le deuxième membre est un polynôme de degré 2, on va chercher un polynôme de degré 2 : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$$\begin{aligned} x^2 - 11x + 13 &= 9f''(x) - 6f'(x) + f(x) \\ &= 9.2\alpha - 6(2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= \alpha x^2 + (\beta - 12\alpha)x + (18\alpha + \gamma - 6\beta) \end{aligned}$$

On doit donc avoir $\alpha = 1$, $\beta - 12\alpha = -11$ et $18\alpha + \gamma - 6\beta = 13$, ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 1$.
La fonction $x^2 + x + 1$ est solution particulière.
Les solutions sont la somme de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.
Il s'agit donc des fonctions de la forme :

$$f(x) = x^2 + x + 1 + (\lambda + \mu x)\, e^{x/3} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

7. L'équation homogène associée est $f''(x) - 3f'(x) - 10f(x)$. Son polynôme associé est $X^2 - 3X - 10$, de discriminant $\Delta = 49$ et de racines $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda e^{5x} + \mu e^{-2x}$$

Cherchons maintenant une solution particulière. Puisque le terme qui ne fait pas intervenir x de l'équation différentielle est le produit d'un polynôme de degré 1 par e^x, on va chercher $f(x)$ sous la même forme : $f(x) = (\alpha x + \beta)e^x$. On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\alpha x + \beta + \alpha)e^x \\ f''(x) &= (\alpha x + \beta + 2\alpha)e^x \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0 &= f''(x) - 3f'(x) - 10f(x) + (12x - 11)e^x \\ &= ((12 - 12\alpha)x - 12\beta - \alpha - 11)e^x \end{aligned}$$

Il faut donc choisir $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. La solution particulière ainsi trouvée est $f(x) = (x-1)e^x$ et les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = (x-1)e^x + \lambda e^{5x} + \mu e^{-2x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 4 :

a) $\phi'(x) = \frac{(\cos(x))'}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

b) Commençons par résoudre l'équation homogène $y' + \tan(x)y$. Puisque ϕ est une primitive de $-\tan$, les solutions de l'équation homogène sont toutes les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \exp(\phi(x)) = \lambda \cos(x)$ où λ est un réel quelconque.

La solution particulière $y = 1$ est évidente. Les solutions de l'équation différentielle sont donc exactement les fonctions de la forme :

$$y(x) = 1 + \lambda \cos(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 :

1.1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

Lorsque l'on suppose y fixé, la dérivée par rapport à x de x^2 est $2x$, celle de $2xy$ est $2y$ et celle de y^2 est 0 (c'est une constante). Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y = 2(x + y)$$

De même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y = 2(x + y)$$

1.2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)\sin'(x/y) = \frac{1}{y}\cos(x/y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)\sin'(x/y) = -\frac{x}{y^2}\cos(x/y)$$

2. Lorsque x' et y' tendent vers 0 :

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{4}+x', 1+y') &= f(\frac{\pi}{4},1) + x'\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4},1) + y'\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4},1) + \sqrt{x'^2+y'^2}\epsilon(x',y') \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{x'^2+y'^2}\epsilon(x',y') \end{aligned}$$

soit, en posant $x' = x - \frac{\pi}{4}$ et $y' = y-1$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + (x-\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2} - (y-1)\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{x'^2+y'^2}\epsilon(x',y') \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + x\frac{\sqrt{2}}{2} - y\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{x'^2+y'^2}\epsilon(x',y') \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent est obtenue en ne gardant que les termes d'ordre 0 et 1 de cette expression : elle représente, au voisinage de $(\frac{\pi}{4},1)$, une approximation affine de la valeur de f. L'équation vaut donc :

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + x\frac{\sqrt{2}}{2} - y\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 6 :

1. $f(x) = g(x)e^{r_1 x}$
$f'(x) = g'(x)e^{r_1 x} + r_1 g(x)e^{r_1 x}$
$f''(x) = g''(x)e^{r_1 x} + 2r_1 g'(x)e^{r_1 x} + r_1^2 g(x)e^{r_1 x}$

$$\begin{aligned} 0 &= af''(x) + bf'(x) + cf(x) \\ &= a(g''(x) + 2r_1 g'(x) + r_1^2 g(x))e^{r_1 x} + b(g'(x)e^{r_1 x} + r_1 g(x)e^{r_1 x})e^{r_1 x} + cg(x)e^{r_1 x} \\ &= (ag''(x) + (2ar_1+b)g'(x))e^{r_1 x} + (ar_1^2 + br_1 + c)g(x)e^{r_1 x} \\ &= (ag''(x) + (2ar_1+b)g'(x))e^{r_1 x} \end{aligned}$$

On a utilisé pour la dernière égalité le fait que r_1 était une racine de $aX^2 + bX + X$.
En multipliant par $e^{-r_1 x}$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$ag''(x) + (2ar_1+b)g'(x) = 0$$

2. Si $2ar_1 + b = 0$, l'équation différentielle devient $g''(x) = 0$. La fonction g doit donc être de la forme $g(x) = \lambda + \mu x$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Si $2ar_1+b \neq 0$, l'équation différentielle est $g''(x) = -(2r_1+\frac{b}{a})g'(x)$, soit $h'(x) = -(2r_1+\frac{b}{a})g'(x)$. La fonction h est donc de la forme $h(x) = \alpha e^{-(2r_1+\frac{b}{a})x}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $g'(x) = h(x)$, la fonction g est de la forme :

$$g(x) = \frac{-\alpha}{2r_1 + b/a} e^{-(2r_1+\frac{b}{a})x} + \mu \qquad \alpha, \mu \in \mathbb{R}$$

Si on pose $\lambda = \frac{-\alpha}{2r_1+b/a}$, on obtient que les solutions sont les fonctions g de la forme :

$$g(x) = \lambda e^{-(2r_1+b/a)x} + \mu \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. Si $r_1 = r_2$, $r_1 = -\frac{b}{2a}$ donc $2ar_1 + b = 0$. Réciproquement, si $2ar_1 + b = 0$, $r_1 = -\frac{b}{2a}$. Or $r_1 = -\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $\sqrt{\Delta} = 0$ et $\Delta = 0$, ce qui veut dire que le polynôme a une racine double.
4. Si $r_1 = r_2$, $2ar_1 + b = 0$ donc g est de la forme $g(x) = \lambda + \mu x$. Puisque $f(x) = g(x)e^{r_1 x}$, on en déduit que la fonction g est de la forme :

$$f(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_1 x}$$

Si $r_1 \neq r_2$, puisque $r_1 + r_2 = -b/a$, on a $r_1 + b/a = -r_2$. Comme g est de la forme $g(x) = \lambda e^{-(2r_1+b/a)x} + \mu$, on trouve pour f :

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)e^{r_1 x} \\ &= \lambda e^{-(r_1+b/a)x} + \mu e^{r_1 x} \\ &= \lambda e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x} \end{aligned}$$

où λ et μ sont des réels.