Université Pierre et Marie Curie — Le 25 octobre 2012
LM110 — http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Exercice 1 :

1. Montrer que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

2. Calculer $\arctan'(x)$.

3. Calculer le développement limité de $\arctan'(x)$ en 0 à l'ordre $2n$.

4. En utilisant le fait qu'on peut intégrer les développements limités, calculer le développement limité de $\arctan(x)$ en 0 à l'ordre $2n + 1$.

Exercice 2 : [Plus difficile]

Pour chacun des développements limités suivants, déterminer une fonction admettant, en 0, ce développement limité.

$$f_1(x) = 1 + 2x + 4x^2 + ... + 2^n x^n + x^n \epsilon(x)$$
$$f_2(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + x^n \epsilon(x)$$
$$f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$$
$$f_4(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n(n-1)} + x^n \epsilon(x)$$

[Indication : remarquer que $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.]

Exercice 3 :

Soient a et b des réels, éventuellement égaux à $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que $a < b$. Soit $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante.
On suppose que f admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$:

$$c = \lim_{x \to a^+} f(x)$$
$$d = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Le but de l'exercice est de démontrer rigoureusement que f est une bijection de $]a; b[$ vers $]c; d[$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]a; b[$, $c < f(x) < d$.

2. Démontrer que f est injective.

3. Dans cette question, on montre que f est surjective. Soit $y \in]c; d[$ quelconque. Il faut montrer qu'il existe au moins un $x \in]a; b[$ tel que $f(x) = y$.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que $f(x_0) < y$. [Indication : raisonner par l'absurde et montrer que, si ce n'est pas le cas, $c \geq y$.]

b) Montrer qu'il existe $x_1 \in]a;b[$ tel que $f(x_1) > y$.
c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x \in]a;b[$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 4 : [D'après l'examen de septembre 2006]
Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de chacune des fonctions suivantes. Donner l'équation de la tangente à leur graphe en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente, si c'est possible.

$f_1(x) = \ln(1 + x - x^2)$
$f_2(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$

Exercice 5 : [D'après l'examen de mai 2007]
On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par la formule :

$$f(x) = \tan^3(x) + 3\tan(x)$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. Calculer la dérivée en 0 de la fonction réciproque f^{-1} de f.
4. Calculer le développement limité de f^{-1} en 0, à l'ordre 2.

Exercice 6 :
1. Soient a, b, c, d des réels, qui peuvent éventuellement être égaux à $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que $a < b$ et $c < d$.
Soit $f :]a;b[\to]c;d[$ une fonction strictement croissante. Soit $g :]c;d[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.
a) Soient x, y des réels appartenant à $]a;b[$. On suppose que $x < y$. Démontrer que $g \circ f(x) < g \circ f(y)$.
b) Déduire que la question a) que $g \circ f$ est strictement croissante sur $]a;b[$.
2. On va étudier la fonction $h(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$. On définit $f(x) = \frac{\pi}{2}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable.
b) Calculer la dérivée de f et montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
e) En utilisant la question 1., montrer que h est strictement croissante. [Indication : poser $a = -\infty$, $b = +\infty$, $c = -\frac{\pi}{2}$, $d = \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = \sin(x)$.]
f) Calculer la limite de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
g) Montrer que la fonction h réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et un intervalle que l'on précisera.
h) Déduire de la question g) (sans calcul !) que l'équation $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet une unique solution pour $x \in \mathbb{R}$.

3. a) Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Déterminer tous les x qui sont solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et qui appartiennent à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

c) Résoudre l'équation $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 7 : [Plus difficile]

On définit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2}) \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout n, f est de classe $\mathcal{C}^n$ et que la dérivée n-ième de f est de la forme :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2}) \frac{P_n(x)}{x^{k_n}} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

où P_n est un polynôme et k_n un entier positif.

2. Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0. Le calculer.