Université Pierre et Marie Curie Le 25 octobre 2012
LM110

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. $\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
2. Par définition, la fonction arctan est la réciproque de tan, qui réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $]-\infty; +\infty[$. La dérivée de tan ne s'annule pas, puisque $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 1$ pour tout x. La fonction réciproque arctan est donc dérivable (voir l'exercice 5 du TD des 27 et 28 septembre) et sa dérivée vaut :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que, puisque arctan est la fonction réciproque de tan, $\tan \circ \arctan(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On sait que $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + ... + (-1)^n X^n + \epsilon(X) X^n$. On pose $X = x^2$ et on obtient :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + \epsilon(x) x^{2n}$$

4. Puisque $\tan(0) = 0$, $\arctan(0) = \arctan(\tan(0)) = 0$. On intègre le DL de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \arctan(x) - \arctan(0) \\
&= \int_0^x (1 - s^2 + s^4 - ... + (-1)^n s^{2n} + \epsilon(s) s^{2n}) ds \\
&= \int_0^x 1 ds - \int_0^x s^2 ds + ... + (-1)^n \int_0^x s^{2n} ds + \int_0^x s^{2n} \epsilon(s) ds \\
&= x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \epsilon(x) x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Remarque : pour chaque fonction, il y a une infinité de solutions.

1. Posons $X = 2x$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 + 2x + 4x^2 + ... + 2^n x^n + x^n \epsilon(x) \\ &= 1 + X + X^2 + ... + X^n + \frac{X^n}{2^n}\epsilon(\frac{X}{2}) \\ &= 1 + X + X^2 + ... + X^n + X^n \epsilon(X) \end{aligned}$$

Cette dernière expression est le développement limité de $\frac{1}{1-X} = \frac{1}{1-2x}$. La fonction $f_1 : x \to \frac{1}{1-2x}$ admet donc le développement limité demandé.

2. Soit F_2 la primitive de f_2 valant 0 en 0. Puisque $f_2 = F_2'$, on peut intégrer le développement limité de f_2 (comme à la question 4. de l'exercice 1) et on trouve que le développement limité de F_2 doit être :

$$F_2(x) = x + x^2 + x^3 + ... + x^{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$$

Puisqu'il s'agit du développement limité de $\frac{1}{1-x} - 1$, il est tentant de regarder si la fonction $f_2(x) = \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)'$ conviendrait.

Avec cette définition, on a $f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Cette fonction admet bien un développement limité car elle est infiniment dérivable (et le théorème de Taylor-Young démontre que toutes les fonctions infiniment dérivables admettent des développements limités à tout ordre). Vérifions que ce développement limité est bien celui qu'on voulait.

Si on pose $f_2(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$, puisqu'on peut intégrer les développements limités, on en déduit que le développement limité de $F_2(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ doit être :

$$\frac{1}{1-x} - 1 = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$$

Puisqu'on sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$ et puisque le développement limité est unique, on en déduit :

$$a_0 = 1, a_1 = 2, ..., a_n = n + 1$$

Donc $f_2(x) = 1 + 2x + ... + (n+1)x^n + x^n \epsilon(x)$.

Remarque 1 : la première partie du raisonnement (jusqu'à « Il est tentant de regarder ... ») ne permet pas de démontrer que la fonction $f_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ a le bon développement limité. En effet, on ne peut pas dériver les développements limités donc le raisonnement ne marche pas en sens inverse. Il est en fait possible de trouver des fonctions f_2 dont l'intégrale F_2 ait bien le développement limité $1 + x + ... + x^n + x^n\epsilon(x)$ mais telles que f_2 n'ait pas le développement limité voulu $1 + 2x + ... + x^n\epsilon(x)$ (en fait, à ce moment-là, f_2 n'admet pas de développement limité à tout ordre). Le seul intérêt de la première partie du raisonnement est de nous aider à deviner une expression de f_2 mais, ensuite, il est donc indispensable de vérifier que f_2 convient bien.

Remarque 2 : pour montrer que f_2 convenait, on aurait aussi pu utiliser la formule donnant le développement limité de $(1+x)^\alpha$, avec $\alpha = -2$.

3. Le développement limité de f_3 ne doit contenir que les termes pairs du développement limité de la fonction exp.

Posons $f_3(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et vérifions que cette fonction admet le bon développement limité :

$$\begin{aligned}
2f_3(x) =& e^x + e^{-x} \\
=& 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x) \\
& + 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + ... + \frac{(-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x) \\
=& 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x) \\
& + 1 - x + \frac{x^2}{2} + ... - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x) \\
=& 2 + x^2 + ... + 2\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Donc :

$$f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$$

4.

$$\begin{aligned}
f_4(x) &= -x + (1 - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})x^3 + ... + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n})x^n + x^n\epsilon(x) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} \\
&\quad + x^2 + \frac{x^3}{2} + ... + \frac{x^n}{n-1} + x^n\epsilon(x) \\
&= (1-x)(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n}) + x^n\epsilon(x)
\end{aligned}$$

On reconnaît dans cette dernière formule le développement limité de $(1-x)\ln(1-x)$ donc la fonction $f_4(x) = (1-x)\ln(1-x)$ convient.

Exercice 3 :

Dans les question 1. et 3., on utilisera la propriété suivante :
Supposons que g et h sont deux fonctions de $]a;b[$ vers $\mathbb{R}$ telles que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in]a;b[$. Supposons de plus que $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ existent. Alors :

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x)$$

La même propriété est vraie si on considère la limite en b.
Attention : la propriété n'est plus vraie si on remplace les signes «$\leq$» par des signes «$<$».

1. On va commencer par montrer que, pour tout $x \in]a;b[$, $c \leq f(x) \leq d$.
Soit $x \in]a;b[$ quelconque. Pour tout $y \in]a;x]$, $y \leq x$ donc, puisque f est croissante :

$$f(y) \leq f(x)$$

On regarde la limite quand y tend vers a :

$$c = \lim_{y \to a} f(y) \leq \lim_{y \to a} f(x) = f(x)$$

Donc $c \leq f(x)$.
De même, pour tout $y \in [x; b[$, $y \geq x$ donc, puisque f est croissante :

$$f(y) \geq f(x)$$

On regarde la limite quand y tend vers b :

$$d = \lim_{y \to b} f(y) \geq \lim_{y \to b} f(x) = f(x)$$

Donc $d \geq f(x)$.
Il suffit pour terminer la question 1. de montrer qu'en fait, les inégalités sont strictes.
Commençons par montrer que $f(x) > c$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $f(x) = c$. Alors, pour tout $y \in]a; x[$, $f(y) < f(x)$ (puisque f est croissante) donc $f(y) < c$. C'est absurde car on a vu que $c \leq y \leq d$.
De même, si on raisonne par l'absurde et on suppose que $f(x) = d$, alors, pour tout $y \in]x; b[$, $f(y) > d$, ce qui est absurde. Donc $f(x) < d$.

2. La fonction f est injective car elle est strictement croissante. En effet, si $x \neq y$, soit $x < y$ et alors $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$, soit $x > y$ et alors $f(x) > f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.

3. a) Raisonnons par l'absurde et supposons que ce n'est pas le cas. Alors, pour tout $x_0 \in]a; b[$, $f(x_0) \geq y$. On regarde la limite quand x_0 tend vers a :

$$c = \lim_{x_0 \to a} f(x_0) \geq \lim_{x_0 \to a} y = y$$

Donc $y \leq c$. C'est absurde car, d'après la question 1., $c < f(y) < d$.

b) C'est le même raisonnement qu'à la question précédente. On raisonne par l'absurde et on suppose que ce n'est pas le cas. Alors, pour tout $x_1 \in]a; b[$, $f(x_1) \leq y$. On regarde la limite quand x_1 tend vers b :

$$d = \lim_{x_1 \to b} f(x_1) \leq \lim_{x_1 \to b} y = y$$

Donc $y \geq d$. C'est absurde car, d'après la question 1., $c < f(y) < d$.

c) On applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f, sur le segment $[x_1; x_2]$. C'est possible car f est continue.
D'après les questions a) et b), $f(x_0) < y < f(x_1)$ donc il existe $x \in [x_0; x_1]$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 4 :

1. $\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + X^3\epsilon(X)$

Posons $X = x - x^2$:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (x - x^2) - \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} + (x-x^2)^3\epsilon(x-x^2) \\
&= x - x^2 - \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \\
&= x - x^2 - \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \\
&= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente en 0 est $y = f_1'(0)(x-0) + f_1(0)$. Or $f_1'(0)$ est le coefficient du terme d'ordre 1 du développement limité de f_1 en 0 donc $f_1'(0) = 1$ et l'équation devient :

$$y = x$$

Puisque $-\frac{3}{2} < 0$, la courbe de f_1 est en-dessous de la tangente au voisinage de 0.
2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} \\
&= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + x^2\epsilon(x)
\end{aligned}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= (x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x))(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + x^2\epsilon(x)) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{24} + x^3\epsilon(x)
\end{aligned}$$

L'équation de la tangente en 0 est $y = f_2'(0)(x-0) + f_2(0)$. Puisque $f_2'(0) = 1$, l'équation est $y = x$.
Puisque $-\frac{1}{2} < 0$, la courbe de f_1 est en-dessous de la tangente au voisinage de 0.

Exercice 5 :
1. On sait que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. La fonction f est dérivable car somme de fonctions dérivables et sa dérivée vaut :

$$f'(x) = 3\tan'(x)\tan^2(x) + 3\tan'(x) = 3(1+\tan^2(x))^2$$

Ainsi, f' est une fonction strictement positive sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et f est strictement croissante.
2. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$ vers $]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x);\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)[$.
Il faut donc calculer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
On sait que $\lim_{x\to-\pi/2}\tan(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to\pi/2}\tan(x)=+\infty$. On a donc $\lim_{x\to-\pi/2}\tan^3(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to\pi/2}\tan^3(x)=+\infty$. Par somme des limites :

$$\lim_{x\to-\pi/2} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to\pi/2} f(x)=+\infty$$

La fonction f réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$.
3. Puisque $f(0)=0$, $f^{-1}(0)=f^{-1}(f(0))=0$.

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(0)}=\frac{1}{f'(0)}$$

On a vu à la question 1. que $f'(0)=3(1+\tan^2(0))^2=3$. On a donc $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{3}$.
4. La fonction f^{-1} est infiniment dérivable donc, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité en 0 à tout ordre. Calculons celui à l'ordre 2.
La fonction f est impaire car tan est une fonction impaire. La fonction f^{-1} est donc également impaire :

$$f(-f^{-1}(x))=-f(f^{-1}(x))=-x \text{ donc } f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$$

Les termes pairs du développement limité de f^{-1} en 0 sont donc nuls. Le terme d'ordre 1 vaut $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{3}$ donc :

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{3}+x^2\epsilon(x)$$

Exercice 7 :
1. Pour tous les entiers $n\geq 0$, on note $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante :

$\mathcal{P}_n$: La fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$. De plus, il existe P_n et k_n tels que P_n est un polynôme, k_n est un entier positif et :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_n(x)}{x^{k_n}} \text{ si } x\in\mathbb{R}-\{0\} \\ &= 0 \text{ si } x=0 \end{aligned}$$

On va démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tous les entiers n positifs. Par convention, on note $f^{(0)}=f$.
<u>Initialisation</u> : on démontre $\mathcal{P}_0$. Il faut tout d'abord montrer que la fonction f est continue. Elle est continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ car c'est une composée de fonctions continues. De plus, lorsque $x\to 0$, $-\frac{1}{x^2}\to-\infty$ donc :

$$\lim_{x\to 0}\exp(-\frac{1}{x^2})=0$$

La fonction f est donc aussi continue en 0. Si on pose $P_0(x) = 1$ (le polynôme constant valant 1) et $k_0 = 0$, on a bien :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2}) = \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_0(x)}{x^{k_0}} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est donc vérifiée.

Récurrence : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, pour un $n \geq 0$ quelconque et on veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.
Soient P_n un polynôme un k_n un entier positif tels que :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_n(x)}{x^{k_n}} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

Ils existent car la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
La fonction f^n est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$. En effet, sur cet ensemble, elle est le produit de $\exp(-\frac{1}{x^2})$ par $\frac{P_n(x)}{x^{k_n}}$, chacune de ces deux fonctions étant elle-même dérivable. Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, la dérivée de $f^{(n)}$ vaut :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\exp(-\frac{1}{x^2})\right)' \frac{P_n(x)}{x^{k_n}} + \exp(-\frac{1}{x^2}) \left(\frac{P_n(x)}{x^{k_n}}\right)' \\ &= \frac{2}{x^3}\exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_n(x)}{x^{k_n}} + \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_n'(x)x^{k_n} - k_nP_n(x)x^{k_n-1}}{x^{k_n}} \\ &= \exp(-\frac{1}{x^2})\left(\frac{2P_n(x)}{x^{k_n+3}} + \frac{P_n'(x)x - k_nP_n(x)}{x^{k_n+1}}\right) \\ &= \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{2P_n + P_n'(x)x^3 - k_nP_n(x)x^2}{x^{k_n+3}} \end{aligned}$$

Montrons que la fonction $f^{(n)}$ est aussi dérivable en 0. Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_n(x)}{x^{k_n+1}} = P_n(x)\exp(-\frac{1}{x^2})\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(k_n+1)/2}$$

Quand $x \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$. On sait que $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y}y^\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc en remplaçant y par $\frac{1}{x^2}$ et α par $(k_n+1)/2$, on trouve :

$$\lim_{x\to 0}\exp(-\frac{1}{x^2})\left(\frac{1}{x^2}\right)^{(k_n+1)/2} = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = P_n(0) \times 0 = 0$$

Ainsi, la fonction $f^{(n)}$ est aussi dérivable en 0 et on a montré que, si on posait $P_{n+1}(x) = 2P_n + P_n'(x)x^3 - k_nP_n(x)x^2$ et $k_{n+1} = k_n + 3$, on avait :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_{n+1}(x)}{x^{k_{n+1}}} \text{ si } x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

Il suffit pour terminer de démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$ de prouver que f est de classe $\mathcal{C}^{\backslash+\infty}$. En effet, on a déjà montré qu'elle était $(n+1)$-fois dérivable et que sa dérivée était de la forme demandée.
Il reste donc seulement à démontrer que $f^{(n+1)}$ est continue (c'est indispensable pour que la fonction soit de classe $\mathcal{C}^{n+1}$). Il suffit en fait seulement de montrer que $f^{(n+1)}$ est continue en 0 car, sur $\mathbb{R} - \{0\}$, elle est continue car composée de fonctions continues. Il faut donc montrer :

$$\lim_{x \to 0} \exp(-\frac{1}{x^2})\frac{P_{n+1}(x)}{x^{k_{n+1}}} = 0$$

La démonstration se fait par croissance comparée, de la même façon qu'on a montré que $f^{(n)}$ était dérivable en 0.
<u>Conclusion</u> : On a bien montré que, si $\mathcal{P}_n$ était vraie, $\mathcal{P}_{n+1}$ l'était aussi. Puisque $\mathcal{P}_0$ est vraie, toutes les $\mathcal{P}_n$ le sont, pour tous les n.
2. La fonction f est infiniment dérivable. D'après le théorème de Taylor-Young, elle admet donc un développement limité à tout ordre, de la forme :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

Or on a vu que, pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$. Donc le développement limité de f en 0 est nul : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = x^n\epsilon(x)$$

Remarque : on aurait pu faire la question 2. sans faire la question 1. mais la question 1. nous permet de montrer un résultat plus fort que celui de la question 2. : il existe au moins une fonction infiniment dérivable dont toutes les dérivées successives sont nulles en 0 mais telle que la fonction elle-même n'est pas nulle.