Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 25 octobre 2012

TD : Fonctions

Corrigé de l'exercice 6

1. a) Puisque f est strictement croissante, $f(x) < f(y)$. Puisque g est strictement croissante et $f(x) < f(y)$, $g(f(x)) < g(f(y))$ donc $g \circ f(x) < g \circ f(y)$.

b) Pour n'importe quels réels x et y appartenant à $]a; b[$ tels que $x < y$, l'inégalité $g \circ f(x) < g \circ f(y)$ est vérifiée, d'après la question a). On a donc montré que la fonction $g \circ f$ vérifiait la définition de la stricte croissance.

2. a) Notons $u(x) = e^x - e^{-x}$ et $v(x) = e^x + e^{-x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $v(x) = e^x + e^{-x} > 0$. Pour tout x, $v(x)$ est un réel strictement positif donc $v(x) \neq 0$: v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
La fonction $\frac{u}{v}$ est donc un quotient de fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Elle est donc elle-même définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Le produit d'une fonction définie, continue et dérivable par une constante est une fonction définie, continue et dérivable. La fonction $f = \frac{\pi}{2} \times \frac{u}{v}$ est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) On définit u et v comme à la question précédente.
On a $u'(x) = e^x + e^{-x}$ et $v'(x) = e^x - e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{u}{v}\right)'(x) \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{2\pi}{(e^x + e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

Puisque $2\pi > 0$ et $(e^x + e^{-x})^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car on a vu en a) que $e^x + e^{-x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), la dérivée de f vérifie $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$; elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{e^{-x}(e^x-e^{-x})}{e^{-x}(e^x+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

On sait que $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$. Puisque $-2x \to -\infty$ quand $x \to +\infty$, on trouve, par composition des limites, que $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-2x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{-2x} = 1$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{2}$.

Le calcul de la limite en $-\infty$ est similaire : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2}\frac{e^{x}(e^x-e^{-x})}{e^{x}(e^x+e^{-x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Comme $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x} - 1 = -1 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{2x} + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

d) La fonction f est continue (d'après la question a)) et strictement croissante (d'après la question b)). Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ vers $] \lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

e) Posons $a = -\infty$, $b = +\infty$, $c = -\frac{\pi}{2}$ et $d = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout $x \in]c; d[$, on pose $g(x) = \sin(x)$. La fonction sin est strictement croissante sur l'intervalle $]c; d[=]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: sa dérivée, cos, est strictement positive sur cet intervalle.

La fonction f est strictement croissante sur $]a; b[= \mathbb{R}$, d'après la question b).

On peut donc appliquer le résultat de la question 1. : $h = g \circ f$ est strictement croissante sur $]a; b[= \mathbb{R}$.

f) En $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Puisque la fonction sin est continue :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

En $-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Puisque la fonction sin est continue :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$$

g) La fonction h est continue : $h = \sin \circ f$. La fonction sin est continue et, d'après la question a), f aussi. Puisque la composée de deux fonctions continues est continue, h est continue.

De plus, h est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$, d'après la question e).

La fonction h réalise donc une bijection de $]-\infty; +\infty[$ sur $] \lim_{x\to-\infty} h(x); \lim_{x\to+\infty} h(x)[$. D'après les calculs de limites de la question f), h réalise une bijection de $]-\infty; +\infty[$ sur $]-1; 1[$.

h) On commence par montrer qu'il existe une solution.

$\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1;1[$ car $-1 < 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
Or $h : \mathbb{R} \to]-1;1[$ est surjective (puisqu'elle est bijective, d'après la question g)). Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On montre ensuite que la solution est unique.
Soit x une solution (c'est-à-dire un réel tel que $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Il faut montrer que x est la seule solution.
Si y est un réel tel que $x \neq y$, $h(y) \neq h(x)$ car h est injective (puisqu'elle est bijective). Donc $h(y) \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et y n'est pas solution. Cela démontre bien que x est la seule solution donc que la solution est unique.

3. a) Une solution particulière est $x = \frac{\pi}{4}$. On a donc (en utilisant la dernière propriété des rappels du TD du 4 octobre) :

$$\begin{aligned}(\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}) &\Leftrightarrow (\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{4}))\\ &\Leftrightarrow (x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \frac{\pi}{4}[2\pi])\\ &\Leftrightarrow (x \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi])\end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, les solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, pour $k \in \mathbb{Z}$, ou $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, pour $k \in \mathbb{Z}$. On va chercher quels sont les réels de cette forme qui appartiennent à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
Regardons d'abord les solutions de la forme $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
Si $k = 0$, on a $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
Si $k \geq 1$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \geq \frac{\pi}{4} + 2\pi > \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \notin]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
Si $k \leq -1$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq \frac{\pi}{4} - 2\pi < -\frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \notin]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
Regardons maintenant les solutions de la forme $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
Si $k \geq 0$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \geq \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \notin]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
Si $k \leq -1$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} < -\frac{\pi}{2}$ donc $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \notin]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.
La seul solution qui appartienne à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est donc $\frac{\pi}{4}$.

c) $(h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow \sin(f(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
D'après la question 2.d), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. D'après la question b), la seule possibilité pour qu'on aie $\sin(f(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc d'avoir $f(x) = \frac{\pi}{4}$.
On résoud donc l'équation $f(x) = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}(f(x) = \frac{\pi}{4}) &\Leftrightarrow (\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2})\\ &\Leftrightarrow (2(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x})\\ &\Leftrightarrow (e^x = 3e^{-x}) \Leftrightarrow (e^{2x} = 3)\\ &\Leftrightarrow (2x = \ln 3) \Leftrightarrow (x = \frac{\ln 3}{2})\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc $x = \frac{\ln 3}{2}$.