Université Pierre et Marie Curie
LM110

Les 27 et 28 septembre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Exercice 1 :

Dans cet exercice, E et F sont des ensembles et f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Écrire la définition des termes suivants en n'utilisant que des symboles mathématiques :
- « E est inclus dans F. »
- « f est injective. »
- « f est surjective. »
- « f est continue. »

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x < y < z$, alors $f(x) < f(y) < f(z)$ ou $f(x) > f(y) > f(z)$. Le but de l'exercice est de montrer que f est strictement monotone.

1. Soient $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $w < x < y < z$. Montrer que $f(w) < f(x) < f(y) < f(z)$ ou $f(w) > f(x) > f(y) > f(z)$.
(Indication : Appliquer deux fois la propriété de l'énoncé, d'abord à x, y, z, puis à w, x, y.)

2. Montrer que $f(0) \neq f(1)$.

3. Dans cette question, on suppose que $f(0) < f(1)$. Soient a et b des réels quelconques tels que $a < b$.
Soit n le nombre d'éléments de l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$. Ce nombre est au plus 4 (mais il peut être plus petit si a ou b est égal à 0 ou à 1).
a) Montrer que si $n = 2$, $a = 0$, $b = 1$ et $f(a) < f(b)$.
b) On suppose dans cette question que $n = 3$. On note x_1, x_2, x_3 les éléments de $\{0, 1, a, b\}$, rangés par ordre croissant. Montrer que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. En déduire que $f(a) < f(b)$.
c) On suppose dans cette question que $n = 4$. On note x_1, x_2, x_3, x_4 les éléments de $\{0, 1, a, b\}$, rangés par ordre croissant. Montrer que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$. En déduire que $f(a) < f(b)$.
d) Montrer que, quelle que soit la valeur de n, $f(a) < f(b)$ et en déduire que f est strictement croissante.

4. Dans cette question, on suppose que $f(0) > f(1)$. En adaptant le raisonnement de la question 3., montrer que f est strictement décroissante.

5. Conclure.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bijective. Le but de l'exercice est de montrer que f est strictement monotone.

1. Montrer que, pour tout $x \neq y$, $f(x) < f(y)$ ou $f(x) > f(y)$.

2. On raisonne par l'absurde en supposant que f n'est pas strictement monotone. En utilisant le résultat de l'exercice 2, montrer qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$, $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$ ou bien qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$, $f(x) > f(y)$ et $f(z) > f(y)$.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$, $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$.
a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < \alpha < f(y)$ et $f(z) < \alpha < f(y)$.
b) Montrer qu'il existe $w_1 \in]x; y[$ tel que $f(w_1) = \alpha$.
c) Montrer qu'il existe $w_2 \in]y; z[$ tel que $f(w_2) = \alpha$.
d) Aboutir à une contradiction.

4. Dans cette question, on suppose qu'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$, $f(x) > f(y)$ et $f(z) > f(y)$. En imitant le raisonnement de la question précédente, aboutir à une contradiction.

5. Conclure.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bijective. Le but de l'exercice est de montrer que f^{-1} est continue.
D'après l'exercice 3, f est strictement monotone. On supposera dans l'exercice que f est strictement croissante (mais on pourrait faire un raisonnement identique si f était strictement décroissante).

1. Montrer que f^{-1} est strictement croissante.

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$ quelconques. On pose $y_0 = f^{-1}(x_0)$. Montrer que $f(y_0 - \epsilon) < x_0 < f(y_0 + \epsilon)$ et qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(y_0 - \epsilon) < x_0 - \eta < x_0 + \eta < f(y_0 + \epsilon)$.

3. Montrer que, si $z \in \mathbb{R}$ est tel que $f(y_0 - \epsilon) < z < f(y_0 + \epsilon)$, alors $|f^{-1}(z) - y_0| < \epsilon$.

4. Montrer que, si $z \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, alors $|f^{-1}(z) - f^{-1}(x_0)| < \epsilon$. En déduire le résultat voulu.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bijective. On suppose que f est dérivable et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f^{-1} est dérivable.
D'après l'exercice 4, f^{-1} est continue.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)}{h} = \frac{f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)}{f(f^{-1}(x_0 + h)) - f(f^{-1}(x_0))}$$

2. Montrer que, lorsque $h \to 0$, $f^{-1}(x_0 + h) \to f^{-1}(x_0)$. En déduire que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(f^{-1}(x_0 + h)) - f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)} = f'(f^{-1}(x_0))$$

3. En déduire que f^{-1} est dérivable en x_0 et calculer sa dérivée.

Exercice 6 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2\cos(x)$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

2. Montrer que f' est dérivable. Calculer sa dérivée f'' et tracer le tableau de variations de f'' sur $[0; 2\pi]$.

3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0; \pi[$ tel que $f''(\alpha) = 0$. Montrer qu'il existe un unique $\beta \in]\pi; 2\pi[$ tel que $f''(\beta) = 0$.

4. Calculer α et β.

5. Tracer le tableau de variations de f' sur $]0; 2\pi[$.

6. Montrer qu'il existe un unique $\gamma \in]0; 2\pi]$ tel que $f'(\gamma) = 0$.

7. Montrer que $\gamma \in]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}[$.

8. Montrer que, pour tout $x \geq 2\pi$, $f'(x) > 0$.

9. Tracer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

10. Montrer que $f(\gamma) > 0$.

11. Montrer que, pour tout x, $f(x) = f(-x)$ et tracer approximativement le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

Déterminer la limite, si elle existe, des fonctions suivantes au point indiqué.

$$
\begin{array}{cccc}
f_1 : x \to x\ln(x) & x = 0 & f_2 : x \to x\sin(\frac{1}{x}) & x = 0 \\
f_3 : x \to \frac{x+1+|x-2|}{|3-x|+2x} & x = -\infty & f_4 : x \to \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} & x = +\infty \\
f_5 : x \to \frac{2e^x-5}{3e^x+4} & x = +\infty & f_6 : x \to \frac{x^2+|x|}{x} & x = 0
\end{array}
$$

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$
\begin{array}{ccc}
\cos(3x) = \frac{1}{2} & \sin^2(x) = \cos^2(x) & \tan^2(x) = \tan(x) \\
\ln(x^2-1) + 2\ln(2) = \ln(4x-1) & 4^x - 12.2^x + 32 = 0 & \frac{4}{x\sqrt{x}} - \frac{13}{x} + 9 = 0
\end{array}
$$

Exercice 9 : (difficile)

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f : [a : b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable, de dérivée continue. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $x \in]a; b[$ tel que $f'(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Indication : Raisonner par l'absurde. Montrer que $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est monotone sur $[a; b]$ et en déduire une inégalité stricte entre $f'(a)$ et $f'(b)$.