Université Pierre et Marie Curie
LM110 Le 27 septembre 2012

TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

- $\forall x \in E, x \in F$ ou $(x \in E) \Longrightarrow (x \in F)$
- $\forall x \, \forall y \neq x, f(y) \neq f(x)$ ou $(x \neq y) \Longrightarrow (f(x) \neq f(y))$
- $\forall x \, \exists y, x = f(y)$
- $\forall x \, \forall \epsilon > 0 \, \exists \eta \, \forall y \in [x - \eta; x + \eta], |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Exercice 2 :

1. D'après la propriété de l'énoncé, puisque $x < y < z$, $f(x) < f(y) < f(z)$ ou $f(x) > f(y) > f(z)$. Étudions ces deux cas.
- Cas $f(x) < f(y) < f(z)$: d'après la propriété de l'énoncé, puisque $w < x < y$, $f(w) < f(x) < f(y)$ ou $f(w) > f(x) > f(y)$. Il n'est pas possible qu'on ait $f(w) > f(x) > f(y)$, sinon on aurait à la fois $f(x) > f(y)$ et $f(x) < f(y)$. Donc $f(w) < f(x) < f(y)$ et, puisque $f(x) < f(y) < f(z)$, on a $f(w) < f(x) < f(y) < f(z)$.
- Cas $f(x) > f(y) > f(z)$: d'après la propriété de l'énoncé, $f(w) < f(x) < f(y)$ ou $f(w) > f(x) > f(y)$. Il n'est pas possible qu'on ait $f(w) < f(x) < f(y)$, sinon on aurait à la fois $f(x) < f(y)$ et $f(x) > f(y)$. Donc $f(w) > f(x) > f(y)$ et, puisque $f(x) > f(y) > f(z)$, $f(w) > f(x) > f(y) > f(z)$.
Dans chacun des deux cas, on a bien montré que, soit $f(w) < f(x) < f(y) < f(z)$ soit $f(w) > f(x) > f(y) > f(z)$.

2. On applique la propriété de l'énoncé à $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$. D'après cette propriété, soit $f(0) < f(1) < f(2)$ soit $f(0) > f(1) > f(2)$. Donc $f(0) < f(1)$ ou $f(0) > f(1)$. Donc $f(0) \neq f(1)$.

3. a) Si l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$ ne contient que deux éléments, puisqu'il contient 0 et 1 :

$$\{0, 1, a, b\} = \{0, 1\}$$

Donc $a = 0$ ou 1 et $b = 0$ ou 1. Quatre cas sont donc possibles : $(a, b) = (0, 0)$, $(a, b) = (0, 1)$, $(a, b) = (1, 0)$ ou $(a, b) = (1, 1)$. Mais, puisque $a < b$, les cas $(a, b) = (0, 0)$, $(a, b) = (1, 0)$ et $(a, b) = (1, 1)$ sont impossibles donc $a = 0$ et $b = 1$.
Puisqu'on a supposé que $f(0) < f(1)$, $f(a) < f(b)$.

b) Puisque x_1, x_2, x_3 sont distincts et rangés par ordre croissant, $x_1 < x_2 < x_3$. D'après la propriété de l'énoncé, $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ou $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$; il suffit de montrer que le deuxième cas est impossible.

Supposons par l'absurde que $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Dans ce cas, la fonction f est strictement décroissante sur l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$: en effet, si $x_k < x_l$ (où k et l sont des entiers de $\{1, 2, 3\}$), $k < l$ (puisque x_1, x_2, x_3 sont rangés par ordre croissant) et $f(x_k) > f(x_l)$. En particulier, puisque 0 et 1 appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$ et puisque $0 < 1$, $f(0) > f(1)$. C'est en contradiction avec l'hypothèse qu'on a fait dans cette question.
Ce raisonnement prouve que le cas $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ est impossible. Donc $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$. Alors la fonction f est strictement croissante sur l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$. Puisque $a < b$, $f(a) < f(b)$.

c) Le raisonnement est le même qu'à la question précédente.
Puisque x_1, x_2, x_3, x_4 sont distincts et rangés par ordre croissant, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. D'après la question 1., $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$ ou $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$. On va montrer en raisonnant par l'absurde que le deuxième cas est impossible.
Supposons que $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$. Alors f est strictement décroissante sur $\{0, 1, a, b\}$. En particulier, puisque $0 < 1$, $f(0) > f(1)$. C'est en contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.
Donc $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$ et f est strictement croissante sur $\{0, 1, a, b\}$. En particulier, puisque $a < b$, $f(a) < f(b)$.

d) Le nombre d'éléments de l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$ est au moins égal à 2 (car l'ensemble contient 0 et 1) et au plus égal à 4. On est donc nécessairement dans l'un des trois cas traités aux questions a), b) et c) et, on a vu que, dans chacun de ces trois cas, $f(a) < f(b)$.
Puisqu'on a choisi a et b quelconques tels que $a < b$, on a démontré que, pour tous a et b tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$. La fonction f est donc strictement croissante.

4. Soient a et b quelconques tels que $a < b$. On note n le nombre d'éléments de l'ensemble $\{0, 1, a, b\}$. Il est égal à $2, 3$ ou 4. On va raisonner en fonction de la valeur de n.
- Si $n = 2$, alors $\{0, 1, a, b\} = \{0, 1\}$ et, puisque $a < b$, $a = 0$ et $b = 1$. Puisqu'on a supposé que $f(0) > f(1)$, $f(a) > f(b)$.
- Si $n = 3$, notons x_1, x_2, x_3 les éléments de $\{0, 1, a, b\}$ rangés par ordre croissant. Puisque $x_1 < x_2 < x_3$, d'après la propriété de l'énoncé, $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ou $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Or il est impossible que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ (sinon f serait strictement croissante sur $\{0, 1, a, b\}$ et, puisque $0 < 1$, on aurait $f(0) < f(1)$). Donc $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ et f est strictement décroissante sur $\{0, 1, a, b\}$. En particulier, puisque $a < b$, $f(a) > f(b)$.
- Si $n = 4$, notons x_1, x_2, x_3, x_4 les éléments de $\{0, 1, a, b\}$ rangés par ordre croissant. Puisque $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, d'après la question 1., $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$ ou $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$. Il est impossible que $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$ (sinon f serait strictement croissante sur $\{0, 1, a, b\}$ et on aurait $f(0) < f(1)$) donc $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $\{0, 1, a, b\}$ et, puisque $a < b$, $f(a) > f(b)$.
Donc, dans tous les cas, $f(a) > f(b)$.
On a démontré que, pour tous a et b tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$. La fonction f est donc strictement décroissante.

5. D'après la question 3, si $f(0) < f(1)$ ou si $f(0) > f(1)$, f est strictement monotone. Or, d'après la question 2, $f(0) \neq f(1)$ donc on a nécessairement $f(0) < f(1)$ ou $f(0) > f(1)$. La fonction f est donc strictement monotone.

Exercice 3 :

1. C'est dû au fait que $f(x) \neq f(y)$ (car f est injective).

2. Il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$ et tels qu'on n'ait ni $f(x) < f(y) < f(z)$ ni $f(x) > f(y) > f(z)$. Sinon, la propriété de l'énoncé de l'exercice 2 est vérifiée et f est strictement monotone. Soient de tels x, y, z. On différencie selon que $f(x) > f(y)$ ou $f(x) < f(y)$.
Premier cas : $f(x) < f(y)$. Alors on n'a pas $f(y) < f(z)$ (sinon $f(x) < f(y) < f(z)$) donc, d'après la question 1., $f(y) > f(z)$.
Deuxième cas : $f(x) > f(y)$. Alors on n'a pas $f(y) > f(z)$ donc $f(y) < f(z)$.
Dans chacun de ces deux cas, on a bien soit $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$, soit $f(x) > f(y)$ et $f(z) > f(y)$.

3. a) Puisque $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$, $\max(f(x), f(z)) < f(y)$. L'intervalle $]\max(f(x), f(z)); f(y)[$ est donc non-vide. Soit α dans cet intervalle. Alors $f(x) \leq \max(f(x), f(z)) < \alpha < f(y)$ et $f(z) \leq \max(f(x), f(z)) < \alpha < f(y)$.

b) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue, puisque $f(x) < \alpha < f(y)$, il existe $w_1 \in]x; y[$ tel que $f(w_1) = \alpha$.

c) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue, puisque $f(z) < \alpha < f(y)$, il existe $w_2 \in]y; z[$ tel que $f(w_2) = \alpha$.

d) Les réels w_1 et w_2 sont distincts car $w_1 < y < w_2$ mais $f(w_1) = \alpha = f(w_2)$ donc f n'est pas injective. C'est absurde.

4. Soit $\alpha \in]f(y); \min(f(x), f(z))[$; l'intervalle est non-vide donc un tel α existe. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue et $f(y) < \alpha < \min(f(x), f(z)) \leq f(x)$, il existe $w_1 \in]x; y[$ tel que $f(w_1) = \alpha$. De même, puisque $f(y) < \alpha < f(z)$, il existe $w_2 \in]y; z[$ tel que $f(w_2) = \alpha$. Puisque $w_1 < y < w_2$, $w_1 \neq w_2$. Comme $f(w_1) = f(w_2)$, f n'est pas injective. C'est absurde.

5. D'après les questions 3. et 4., les deux cas envisagés dans la question 2. aboutissent à une absurdité. Donc l'hypothèse selon laquelle f n'est pas strictement monotone est absurde et f est strictement monotone.

Exercice 4 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On va montrer que $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$. Par l'absurde, si $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$, alors, puisque f est strictement croissante, $a = f(f^{-1}(a)) \geq f(f^{-1}(b)) = b$. C'est absurde car $a < b$ donc $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$.

2. Puisque f est strictement croissante et puisque $y_0 - \epsilon < y_0 = f^{-1}(x_0) < y_0 + \epsilon$, $f(y_0 - \epsilon) < f(f^{-1}(x_0)) = x_0 < f(y_0 + \epsilon)$.
Soit $\eta \in]0; \min(x_0 - f(y_0 - \epsilon), f(y_0 + \epsilon) - x_0)[$. Un tel η existe puisque $\min(x_0 - f(y_0 - \epsilon), f(y_0 + \epsilon) - x_0) > 0$ donc l'intervalle est non-vide. De plus, comme $\eta < x_0 - f(y_0 - \epsilon)$ et $\eta < f(y_0 + \epsilon) - x_0$, on a bien $f(y_0 - \epsilon) < x_0 - \eta < x_0 + \eta < f(y_0 + \epsilon)$.

3. Si $f(y_0 - \epsilon) < z < f(y_0 + \epsilon)$, alors, puisque f^{-1} est croissante, $y_0 - \epsilon < f^{-1}(z) < y_0 + \epsilon$. Donc $-\epsilon < f^{-1}(z) - y_0 < \epsilon$ et $|f^{-1}(z) - y_0| < \epsilon$.

4. Si $z \in]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, alors, d'après la définition de η, $f(y_0 - \epsilon) < z < f(y_0 + \epsilon)$ donc, d'après la question 3., $|f^{-1}(z) - f^{-1}(x_0)| = |f^{-1}(z) - y_0| < \epsilon$.

Exercice 5 :

1. C'est une conséquence du fait que $f(f^{-1}(x_0+h)) - f(f^{-1}(x_0)) = x_0 + h - x_0 = h$.

2. Puisque f^{-1} est continue, elle est continue en x_0 et $f^{-1}(x_0+h) \to f^{-1}(x_0)$ quand $h \to 0$. L'égalité demandée est une conséquence de la définition de la dérivée de f' au point $f^{-1}(x_0)$.

3. Lorsque $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(x_0+h)-f^{-1}(x_0)}{h} = \left(\frac{f(f^{-1}(x_0+h))-f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x_0+h)-f^{-1}(x_0)}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Exercice 6 :

1. La fonction f est la somme de deux fonctions continues et dérivables, $x \to \frac{x^2}{2}$ et $x \to 2\cos(x)$. Elle est donc continue et dérivable. Sa dérivée vaut :

$$f'(x) = x - 2\sin(x)$$

2. La fonction f' est la somme des deux fonctions dérivables $x \to x$ et $x \to -2\sin(x)$. Elle est donc dérivable et sa dérivée vaut :

$$f''(x) = 1 - 2\cos(x)$$

La fonction f'' est aussi dérivable (car c'est la somme des deux fonctions dérivables $x \to 1$ et $x \to 2\cos(x)$) et sa dérivée vaut $f'''(x) = 2\sin(x)$. Le tableau de variation de f'' est donc le suivant :

	0		π		2π
f'''	0	$+$	0	$-$	0
f''	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

3. La fonction f'' est strictement croissante sur $]0;\pi[$, d'après la première question. Elle réalise donc une bijection de $]0;\pi[$ sur $]f''(0);f''(\pi)[=]-1;3[$. Puisque $0 \in]-1;3[$, il existe $\alpha \in]0;\pi[$ tel que $f''(\alpha)=0$ (car f'' est surjective) et ce α est unique (car f'' est injective).
Le raisonnement est le même pour β. Comme f'' est strictement décroissante sur $]\pi;2\pi[$, f'' réalise une bijection de $]\pi;2\pi[$ vers $]f''(2\pi),f''(\pi)[=]-1;3[$. Puisque $0 \in]-1;3[$, il existe $\beta \in]\pi;2\pi[$ tel que $f''(\beta)=0$ et ce β est unique.

4. $f''(\frac{\pi}{3}) = 0$ car $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Puisque $\frac{\pi}{3} \in]0;\pi[$ et puisqu'on a vu que le $\alpha \in]0;\pi[$ tel que $f''(\alpha)=0$ était unique, on a nécessairement $\alpha = \frac{\pi}{3}$. De même, $\beta = \frac{5\pi}{3}$.

5.

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f''	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1
f'	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	2π

6. Puisque f' est strictement décroissante sur $[0;\frac{\pi}{3}]$, pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{3}]$, $f'(x)<f'(0)=0$ donc $f'(x)\neq 0$.
Puisque f' est strictement décroissante sur $[\frac{5\pi}{3};2\pi]$, pour tout $x\in[\frac{5\pi}{3};2\pi]$, $f'(x)\geq f(2\pi)=2\pi>0$.
Puisque f' est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$, f' réalise une bijection de $[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$ vers $[f(\frac{\pi}{3});f(\frac{5\pi}{3})]$. Or, $f'(\frac{\pi}{3})<f(0)=0<\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}=f(\frac{5\pi}{3})$. Il existe donc $\gamma\in[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$ tel que $f'(\gamma)=0$ (puisque f' est surjective) et ce γ est unique (puisque f' est injective).
Comme f' ne s'annule pas sur $]0;\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3};2\pi]$ et s'annule une et une seule fois sur $[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$, il existe bien un unique $\gamma\in]0;2\pi]$ tel que $f'(\gamma)=0$.

7. On a vu en résolvant la question précédente que $\gamma\in[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$. Or f' est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$ et $\frac{\pi}{2}$ et γ sont des éléments de $[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$. Donc, si $\gamma\leq\frac{\pi}{2}$, $0=f'(\gamma)\leq f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2<\frac{4}{2}-2=0$ (on a utilisé le fait que $\pi<4$). C'est absurde donc $\gamma>\frac{\pi}{2}$.
Montrons maintenant que $f'(2\pi/3)>0$:

$$f'(2\pi/3)=2\pi/3-2\sin(2\pi/3)=2\pi/3-\sqrt{3}>2-\sqrt{3}>2-\sqrt{4}=0$$

Si $\gamma\geq 2\pi/3$, puisque f' est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}]$, $0=f'(\gamma)\geq f'(2\pi/3)>0$. C'est absurde donc $\gamma<2\pi/3$.
Puisque $\gamma>\pi/2$ et $\gamma<2\pi/3$, on a bien $\gamma\in]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}[$.

8. Si $x\geq 2\pi$, $f'(x)=x-2\sin(x)\geq x-2\geq 2\pi-2>0$.

9.

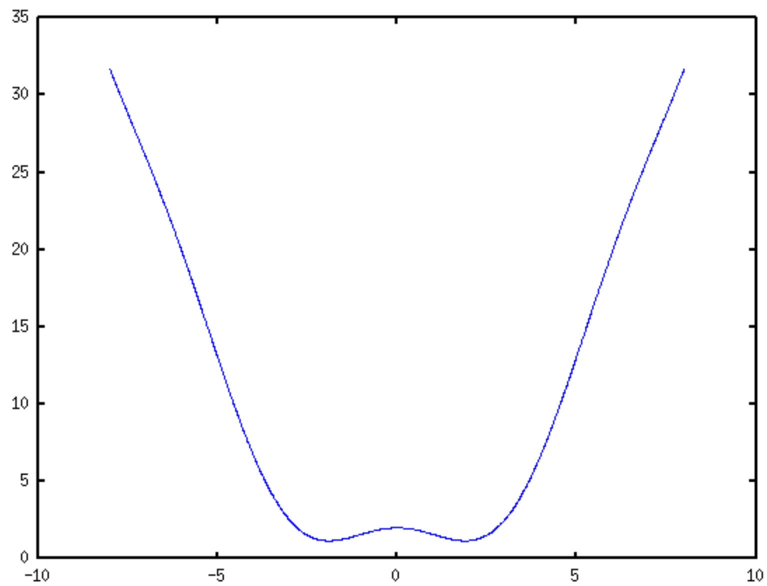
	0		γ		$+\infty$
f'	$0-$	0	$+$		
f	2	$\searrow$	$f(\gamma)$	$\nearrow$	

10. D'après la question 7., $\frac{\pi}{2}\leq\gamma\leq\frac{2\pi}{3}$ donc :

$$\frac{\gamma^2}{2}\geq\frac{\pi^2}{8}$$
$$2\cos(\gamma)\geq 2\cos(\frac{2\pi}{3})=-1$$

On a utilisé le fait que $x\to x^2/2$ est une fonction croissante sur $[0;\pi]$ et cos une fonction décroissante.
Donc $f(\gamma)\geq\frac{\pi^2}{8}-1$. Puisque $\pi>3$, $f(\gamma)>\frac{9}{8}-1=\frac{1}{8}>0$.

11. Pour tout x, $f(-x)=\frac{(-x)^2}{2}+2\cos(-x)=\frac{x^2}{2}+2\cos(x)=f(x)$.



Exercice 7 :

1. On utilise le fait que $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$. Pour tout $x > 0$, $x\ln(x) = e^{\ln x}\ln(x) = -\frac{-\ln(x)}{e^{-\ln(x)}} = -\left(\frac{e^{-\ln x}}{-\ln x}\right)^{-1}$. De plus, lorsque $x \to +\infty$, $\ln x \to -\infty$ donc $-\ln x \to +\infty$ et :

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = -\left(\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}\right)^{-1} = 0$$

2. Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$ donc $-|x| \leq x\sin(\frac{1}{x}) \leq |x|$. Puisque $|x| \to 0$ quand $x \to 0$, par double encadrement :

$$f_2(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0$$

3. Pour tout $x \leq 2$, $x-2 \leq 0$ donc $|x-2| = 2-x$. De même, pour tout $x \leq 3$, $|3-x| = 3-x$. Donc, lorsque $x \to -\infty$:

$$f_3(x) = \frac{x+1+|x-2|}{|3-x|+2x} = \frac{3}{x+3}$$

Puisque 3 est une constante et $x+3 \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$:

$$\lim_{-\infty} f_3(x) = 0$$

4. Pour tout x, $f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Lorsque $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$ et $e^{-x} \to 0$ donc $e^x + e^{-x} \to +\infty$ et $1 + e^{-x} \to 1$. Donc :

$$\lim_{+\infty} f_4(x) = +\infty$$

5. Pour tout x, $f_5(x) = \frac{2-5e^{-x}}{3+4e^{-x}}$. Puisque $2 - 5e^{-x} \to 2$ et $3 + 4e^{-x} \to 3$, $f_5(x) \to \frac{2}{3}$.

6. Pour tout $x > 0$, $\frac{x^2+|x|}{x} = \frac{x^2+x}{x} = x+1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_6(x) = 1$.

Lorsque $x < 0$, $\frac{x^2+|x|}{x} = \frac{x^2-x}{x} = x - 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f_6(x) = -1$. La fonction f_6 n'admet donc pas de limite en 0.

Exercice 8 :

1. Puisque $\frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$,

$$\begin{gathered}\cos(3x) = \frac{1}{2}\\ \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{3})\\ \Leftrightarrow 3x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } 3x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\\ \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{9}[\frac{2\pi}{3}] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{9}[\frac{2\pi}{3}]\end{gathered}$$

2.

$$\begin{gathered}\sin^2(x) = \cos^2(x)\\ \Leftrightarrow \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1+\cos(2x)}{2}\\ \Leftrightarrow \cos(2x) = 0\\ \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\\ \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]\end{gathered}$$

3.

$$\begin{gathered}\tan^2(x) = \tan(x)\\ \Leftrightarrow \tan(x) = 0 \text{ ou } \tan(x) = 1\\ \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\end{gathered}$$

4.

$$\begin{gathered}\ln(x^2-1) + 2\ln(2) = \ln(4x-1)\\ \Leftrightarrow \ln(x^2-1) + \ln(4) = \ln(4x-1)\\ \Leftrightarrow \ln(4(x^2-1)) = \ln(4x-1)\\ \Leftrightarrow 4x-1 > 0 \text{ et } 4(x^2-1) = 4x-1 \Leftrightarrow 4x-1 > 0 \text{ et } 4x^2-4x-3 = 0\end{gathered}$$

Résolvons l'équation du deuxième degré obtenue : $\Delta = 4^2 + 3.4^2 = 4.4^2 > 0$. Puisque $\sqrt{\Delta} = 8$, les deux solutions de l'équation $4x^2 - 4x - 3 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$$

Puisque $4x_1 - 1 = 5 > 0$ et $4x_2 - 1 = -3 \leq 0$, x_1 est la seule solution de l'équation :

$$\begin{gathered} \ln(x^2 - 1) + 2\ln(2) = \ln(4x - 1) \\ \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{3}{2} \end{gathered}$$

5.

$$\begin{gathered} 4^x - 12.2^x + 32 = 0 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0 \end{gathered}$$

Résolvons l'équation de degré 2 $y^2 - 12y + 32 = 0$. On a $\Delta = 12^2 - 32.4 = 144 - 128 = 16 = 4^2 > 0$. Les deux solutions sont $x_1 = 8$ et $x_2 = 4$ donc :

$$\begin{gathered} 4^x - 12.2^x + 32 = 0 \\ \Leftrightarrow 2^x = 8 \text{ ou } 2^x = 4 \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2 \end{gathered}$$

6.

$$\begin{gathered} \frac{4}{x\sqrt{x}} - \frac{13}{x} + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow 4.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 - 13.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 9 = 0 \end{gathered}$$

Résolvons l'équation $4y^3 - 13y^2 + 9 = 0$. Puisque 1 est une solution évidente, on peut factoriser par $(y-1)$: $4y^3 - 13y^2 + 9 = (y-1)(4y^2 - 9y - 9)$.
Le polynôme $4y^2 - 9y - 9$ a pour discriminant $\Delta = 9^2 + 4.4.9 = 25.9 = 15^2$. Les racines de ce polynôme sont donc $x_1 = 3$ et $x_2 = -\frac{3}{4}$. On a donc :

$$\begin{gathered} 4y^3 - 13y^2 + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow y = 1, 3 \text{ ou } -\frac{3}{4} \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} \frac{4}{x\sqrt{x}} - \frac{13}{x} + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 1, 3 \text{ ou } -\frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } \frac{1}{9} \end{gathered}$$

Puisque $\sqrt{x} \geq 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est toujours positif et ne peut pas prendre la valeur $-\frac{3}{4}$.

Exercice 9 :

On raisonne par l'absurde et on suppose que $f'(x) \neq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour tout $x \in]a; b[$.
Alors la fonction $g(x) = f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est de signe constant sur $]a; b[$. En effet, s'il existait $\alpha, \beta \in]a; b[$ tels que $g(\alpha) > 0$ et $g(\beta) < 0$, puisque g est continue, il existerait un $\gamma \in]\alpha; \beta[$ tel que $g(\gamma) = 0$, c'est-à-dire $f'(\gamma) = \frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a}$.
Il y a donc deux cas à étudier : $g(x) > 0$ pour tout $x \in]a; b[$ et $g(x) < 0$ pour tout $x \in]a; b[$. On va se contenter du premier cas ; le deuxième se traite de manière identique.
Pour tout $x \in]a; b[$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)' &= \frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x-a} > 0 \end{aligned}$$

La fonction $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est donc strictement croissante sur $]a; b[$. En particulier :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Puisque g est strictement positive sur $]a; b[$ et puisque g est continue, $g(b) = \lim_{x \to b} g(x) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$f'(b) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > f'(a)$$

C'est en contradiction avec le fait que $f'(b) = f'(a)$. On a donc obtenu une absurdité.