Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 29 novembre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Exercice 1 :
Calculer le développement limité à l'ordre 2 de chacune des fonctions suivantes au point 1 :

$$f_1(x) = \frac{e^{x-1}}{1+x} \qquad\qquad f_2(x) = (1+\ln(x))^{1/3}$$

Exercice 2 :
1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(1) $\quad f'(x) = (x^2+2)f(x)$
(2) $\quad 9f''(x) - 3f'(x) - 2f(x) = 0$
(3) $\quad f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 2x^2 + 4x + 4$

2. a) Calculer la dérivée des fonctions $x \to \ln(\ln(x))$ et $x \to \frac{x^2}{\ln(x)}$.
b) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]1; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}f(x) + x(2 - \frac{1}{\ln(x)})$$

c) Trouver la ou les fonctions qui vérifient l'équation différentielle précédente ainsi que la condition $f(2) = 5$.

Exercice 3 :
1. Donner le domaine de définition de la fonction suivante et en faire un dessin :

$$f(x,y) = \ln(4 - (x^2+y^2)) + \sqrt{x+1}$$

2. Calculer les dérivées partielles de f.
3. Calculer le plan tangent à f au point $(1,1)$.

Exercice 4 :
Calculer le domaine de définition et les dérivées partielles de chacune des deux fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \tan(x/y) \qquad\qquad f_2(x,y) = \frac{x\ln(y)}{x+y}$$

Exercice 5 : [Propriétés de la fonction arcsin]
1. Montrer que la fonction arcsin : $[-1;1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est impaire.
2. Dire pourquoi cette fonction est dérivable sur $]-1;1[$ et calculer sa dérivée.

3. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [0;1[, x \leq \arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in]-1;0], \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \arcsin(x) \leq x$$

4. On suppose que $\arcsin(x)$ admet un développement limité d'ordre 3, de la forme $\arcsin(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x)$. Montrer que $\alpha = \gamma = 0$.

5. En utilisant le fait que $x = \sin(\arcsin(x))$, calculer β et δ.

Exercice 6 :

1. a) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante, alors elle est croissante.

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x-y) \times (f(x) - f(y)) \geq 0$$

b) Montrer que si f est croissante, alors elle vérifie la propriété précédente. [Indication : choisir x et y quelconques puis traiter séparément les deux cas $x \leq y$ et $x > y$.]

2. Trouver trois ensembles E, F, G, deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$ telles que g n'est pas injective mais $g \circ f$ est injective.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables, admettant des dérivées partielles en tout point. On suppose qu'il existe a et b des réels tels que, pour tous réels x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b$$

On va montrer que, pour tous réels x et y, $f(x,y) = f(0,0) + ax + by$.

1. On pose $g(x) = f(x,0)$. Montrer que g est dérivable. Calculer g' et montrer que, pour tout x, $g(x) = g(0) + ax$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On pose, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $h_x(y) = f(x,y)$. Montrer que h_x est dérivable. Calculer h'_x et montrer que, pour tout y, $h_x(y) = h_x(0) + by$.

3. Démontrer le résultat voulu.

Exercice 8 :

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en (x,y) si, pour toutes suites (x_n) et (y_n) telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$, on a $f(x_n, y_n) \to f(x,y)$.

On pose :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$
$$f(0,0) = 0$$

1. Montrer que, pour tout y, la fonction $x \to f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout x, la fonction $y \to f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f n'est pas continue en 0. [Indication : poser $x_n = y_n = \frac{1}{n}$.]