TD : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. Réécrivons $f_1(x)$ en fonction de $y = x - 1$:

$$f_1(x) = \frac{e^y}{2+y}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}e^y \frac{1}{1+y/2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon(y))(1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + y^2\epsilon(y)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + y + \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{4} + y^2\epsilon(y)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{y}{4} + \frac{y^2}{8} + y^2\epsilon(y) \end{aligned}$$

Donc $f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{(x-1)}{4} + \frac{(x-1)^2}{8} + (x-1)^2\epsilon(x-1)$.

2. Réécrivons $f_2(x)$ en fonction de $y = x - 1$:

$$f_2(x) = (1 + \ln(1+y))^{1/3}$$

$$f_2(x) = (1 + y - \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon(y))^{1/3}$$

Le développement limité de $(1+X)^{1/3}$ quand X tend vers 0 est :

$$(1+X)^{1/3} = 1 + \frac{X}{3} - \frac{X^2}{9} + X^2\epsilon(X)$$

Pour $X = y - \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon(y)$, on trouve :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 + \frac{y - \frac{y^2}{2}}{3} - \frac{y^2}{9} + y^2\epsilon(y) \\ &= 1 + \frac{y}{3} - \frac{5y^2}{18} + y^2\epsilon(y) \\ &= 1 + \frac{x-1}{3} - \frac{5(x-1)^2}{18} + (x-1)^2\epsilon(x-1) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1.1. Une primitive de $x \to x^2+2$ est $x \to \frac{x^3}{3}+2x$. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$f(x) = K\exp(\frac{x^3}{3}+2x) \qquad K \in \mathbb{R}$$

1.2. Le polynôme associé à cette équation est $9X^3-3X-2$. Ses racines sont réelles. Ce sont $r_1 = \frac{2}{3}$ et $r_2 = -\frac{1}{3}$. Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$f(x) = \lambda\exp(2x/3) + \mu\exp(-x/3) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1.3. Le polynôme associé à cette équation est X^2+2X+2. Ses racines ne sont pas réelles. Ce sont $r_1 = -1+i$ et $r_2 = -1-i$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $f(x) = e^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)) + f_0(x)$ où f_0 est une solution particulière de l'équation.
Trouvons une solution particulière f_0. Puisque le deuxième membre est un polynôme de degré 2, on va chercher f_0 sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $f_0(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$$\begin{aligned} 2x^2+4x+4 &= f_0''(x) + 2f_0'(x) + f_0(x) \\ &= (2\alpha) + 2(2\alpha x + \beta) + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= 2\alpha x^2 + (4\alpha + 2\beta)x + (2\gamma + 2\beta + 2\alpha) \end{aligned}$$

La fonction f_0 est donc solution de l'équation différentielle si et seulement si $2\alpha = 2$, $4\alpha+2\beta = 4$ et $2\gamma+2\beta+2\alpha = 4$, soit $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et $\gamma = 1$. Donc $f_0(x) = x^2+1$.
Les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$f(x) = e^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)) + x^2 + 1 \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. a) $(\ln(\ln(x)))' = \frac{1}{x\ln(x)}$
$\left(\frac{x^2}{\ln(x)}\right)' = \frac{2x\ln(x)-x^2/x}{\ln^2(x)} = \frac{2x\ln(x)-x}{\ln^2(x)} = x(\frac{2}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln^2(x)})$
b) D'après la question a), une primitive de $\frac{1}{x\ln(x)}$ est $\ln(\ln(x))$. Les solutions de l'équation homogène $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}f(x)$ sont donc les fonctions de la forme $f(x) = K\exp(\ln(\ln(x))) = K\ln(x)$ pour $K \in \mathbb{R}$.
Toutes les solutions de l'équation différentielle sont la somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque de l'équation homogène. Calculons donc une solution particulière. On utilise la méthode de la variation de la constante et on cherche la solution sous la forme $f_0(x) = K(x)\ln(x)$.
Puisque f_0 est une solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} K'(x)\ln(x) + \frac{K(x)}{x} &= (K(x)\ln(x))' \\ &= f_0'(x) \\ &= \frac{1}{x\ln(x)}f_0(x) + x(2 - \frac{1}{\ln(x)}) \\ &= \frac{K(x)}{x} + x(2 - \frac{1}{\ln(x)}) \end{aligned}$$

En simplifiant les $\frac{K(x)}{x}$, on trouve $K'(x)\ln(x) = x(2 - \frac{1}{\ln(x)})$ soit :

$$K'(x) = x(\frac{2}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln^2(x)})$$

D'après la question a), la fonction $K(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}$ est une solution de cette dernière équation. Une solution particulière de l'équation différentielle est donc :

$$f_0(x) = K(x)\ln(x) = \frac{x^2}{\ln(x)}\ln(x) = x^2$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions de la forme :

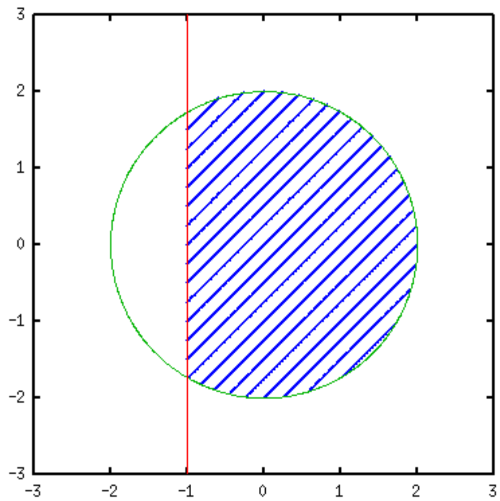
$$f(x) = f_0(x) + K\ln(x) = x^2 + K\ln(x) \qquad K \in \mathbb{R}$$

c) Soit f une fonction vérifiant l'équation différentielle ainsi que la condition $f(2) = 5$. D'après la question b), la fonction f est de la forme $f(x) = x^2 + K\ln(x)$ pour un certain $K \in \mathbb{R}$.
Puisque $f(2) = 5$, $4 + K\ln(2) = f(2) = 5$ donc $K\ln(2) = 1$ et $K = \frac{1}{\ln(2)}$. La fonction f vaut donc $f(x) = x^2 + \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
Donc, si f vérifie les conditions voulues, $f(x) = x^2 + \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
De plus, si $f(x) = x^2 + \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$, f est une solution de l'équation différentielle de l'énoncé (car elle est de la forme trouvée en b)) et elle vérifie $f(2) = 2^2 + \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 5$. Il existe donc une unique fonction qui vérifie les deux conditions demandées, c'est $f(x) = x^2 + \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Exercice 3 :
1. La fonction f est définie en (x, y) si et seulement si $\ln(4 - (x^2 + y^2))$ et $\sqrt{x+1}$ le sont. Il faut donc que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

$$4 - (x^2 + y^2) > 0 \qquad x + 1 \geq 0$$

C'est équivalent à : $x^2 + y^2 < 4$ et $x \geq -1$.
L'ensemble des points tels que $x^2 + y^2 < 4$ est le disque de centre 0 et de rayon $\sqrt{4} = 2$ (dont le bord est indiqué en vert sur le dessin). L'ensemble des points tels que $x \geq -1$ est l'ensemble des points situés à droite de la droite verticale d'équation $x = -1$ (en rouge sur le dessin). Le domaine correspond donc à la zone hachurée en bleu du dessin suivant.



2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{4-(x^2+y^2)} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{4-(x^2+y^2)}$
3. L'équation du plan tangent en $(1,1)$ est :

$$z = f(1,1) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

En calculant les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ grâce aux expressions du b), on obtient :

$$z = \ln(2) + \sqrt{2} + (x-1)(-1+\frac{1}{2\sqrt{2}}) + (y-1)(-1) = \ln(2) + 2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + x(-1+\frac{1}{2\sqrt{2}}) - y$$

Exercice 4 :

1. Le domaine de définition de f_1 est l'ensemble des (x,y) tels que x/y est défini (c'est-à-dire $y \neq 0$) et appartient au domaine de définition de tangente. On sait que $\tan(z)$ est définie ssi $z \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (cela correspond aux points où le cosinus ne s'annule pas). Donc le domaine de définition de f_1 est :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0 \text{ et } \frac{x}{y} \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\}$$

Les dérivées partielles de f_1 sont :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}(1+\tan^2(x/y))$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}(1+\tan^2(x/y))$$

2. Le domaine de définition de f_2 est l'ensemble des (x,y) tels que $\ln(y)$ est défini et $x+y \neq 0$. Il s'agit donc de :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0, x \neq -y\}$$

Les dérivées partielles de f_2 sont :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{\partial(x\ln(y))}{\partial x}(x+y) - \frac{\partial(x+y)}{\partial x}(x\ln(y))}{(x+y)^2} = \frac{\ln(y)(x+y) - x\ln(y)}{(x+y)^2} = \frac{y\ln(y)}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{\partial(x\ln(y))}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial(x+y)}{\partial y}(x\ln(y))}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)/y - x\ln(y)}{(x+y)^2} = \frac{x+y-xy\ln(y)}{y(x+y)^2}$$

Exercice 5 :

1. $\arcsin(-x) = \arcsin(-\sin(\arcsin(x))) = \arcsin(\sin(-\arcsin(x))) = -\arcsin(x)$

2. La fonction arcsin est la réciproque de la fonction sin, qui réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1;1]$. De plus, $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. La fonction arcsin est donc dérivable sur l'image de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire sur $]-1;1[$ et sa dérivée vaut :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

De plus, si $\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et, puisque $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

D'où

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Si $x = 0$, les inégalités sont vraies (ce sont en fait des égalités). Supposons maintenant $x \in]0;1[$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0;x[$ tel que :

$$\arcsin'(c) = \frac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x-0} = \frac{\arcsin(x)}{x}$$

Or $\arcsin'(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$. Puisque $0 \leq c \leq x$:

$$\begin{aligned} 0 \leq c &\leq x^2 \\ \Longrightarrow 1 - x^2 \leq 1 &- c^2 \leq 1 \\ \Longrightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} &\leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Donc $1 \leq \frac{\arcsin(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Puisque $x > 0$, on peut multiplier par x les inégalités :

$$x \leq \arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le raisonnement pour $x \in]-1;0[$ est identique, à part que la multiplication finale par x fait changer de sens les inégalités.

4. La fonction arcsin admet un développement limité à l'ordre 3 car elle est trois fois dérivable sur $]-1;1[$ (en fait, elle est infiniment dérivable, car $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est infiniment dérivable sur $]-1;1[$). La fonction arcsin est impaire donc les termes d'ordre pair de son développement limité sont nuls. Donc $\alpha = \gamma = 0$.
5. $x = \sin(\arcsin(x)) = \sin(\beta x + \delta x^3 + x^3\epsilon(x))$
On sait que $\sin(X) = X - \frac{X^3}{6} + X^3\epsilon(X)$. En posant $X = \beta x + \delta x^3 + x^3\epsilon(x)$, on trouve :

$$x = \beta x + \delta x^3 + x^3\epsilon(x) - \frac{1}{6}(\beta x + \delta x^3 + x^3\epsilon(x))^3 + x^3\epsilon(x) = \beta x + (\delta - \frac{1}{6}\beta^3)x^3 + x^3\epsilon(x)$$

Puisque le développement limité de la fonction x est unique, on doit avoir $\beta = 1$ et $\delta - \frac{1}{6}\beta^3 = 0$, soit $\beta = 1$ et $\delta = \frac{1}{6}$.

Exercice 6 :

1. a) Supposons que f vérifie la propriété. On va montrer que f est croissante. Il faut montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques tels que $x < y$. Puisque $(x-y)(f(x) - f(y)) \geq 0$ et puisque $\frac{1}{x-y} < 0$, $f(x) - f(y) \leq 0$, soit $f(x) \leq f(y)$.
b) Soit f croissante. On va montrer que la propriété voulue est vérifier. Il faut montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $(x-y) \times (f(x) - f(y)) \geq 0$. Soient donc x et y quelconques dans $\mathbb{R}$.
On va séparer deux cas.
Premier cas : $x \leq y$. Alors $f(x) \leq f(y)$ car f est croissante donc $x - y \leq 0$ et $f(x) - f(y) \leq 0$. Donc $(x-y)(f(x) - f(y)) \geq 0$: c'est le produit de deux réels négatifs.
Deuxième cas : $x > y$. Dans ce cas, $f(x) \geq f(y)$ car f est croissante donc $x - y > 0$ et $f(x) - f(y) \geq 0$. Donc $(x-y)(f(x) - f(y)) \geq 0$.
Dans quelque cas qu'on se trouve, on a donc $(x-y)(f(x) - f(y)) \geq 0$. Cette inégalité est donc valable pour n'importe quel x et n'importe quel y. La propriété $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}, (x-y) \times (f(x) - f(y)) \geq 0$ est donc vérifiée.
2. On prend $E = F = G = \mathbb{R}$. On prend $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^2$. La fonction g n'est pas injective car $g(1) = g(-1)$ (par exemple). En revanche, la fonction $g \circ f : x \to (e^x)^2 = e^{2x}$ est injective : si $x \neq y$, $2x \neq 2y$ donc $g \circ f(x) = e^{2x} \neq e^{2y} = g \circ f(y)$.

Exercice 7 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h, 0) - f(x, 0)}{h}$$

Cette dernière expression admet une limite lorsque h tend vers 0, car f est dérivable par rapport à x en $(x, 0)$, donc g est dérivable en x et sa dérivée vaut :

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = a$$

La fonction g est donc dérivable, de dérivée constante égale à a.

Puisque $g'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est une fonction affine de la forme $g(x) = ax + \alpha$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculons α à partir de la valeur de g en 0 :

$$g(0) = a.0 + \alpha = \alpha$$

Donc, pour tout x, $g(x) = ax + g(0)$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. De même qu'à la question précédente, h_x est dérivable en y et sa dérivée vaut :

$$h'_x(y) = \lim_{h \to 0} \frac{h_x(y+h) - h_x(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b$$

La fonction h_x est de dérivée constante égale à b, donc affine de coefficient directeur b : $h_x(y) = by + \beta$. De plus, $\beta = h_x(0)$ donc $h_x(y) = by + h_x(0)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= h_x(y) = h_x(0) + by \\ &= f(x, 0) + by \\ &= g(x) + by \\ &= g(0) + ax + by \\ &= f(0, 0) + ax + by \end{aligned}$$

Exercice 8 :

1. Premier cas : $y \neq 0$. Dans ce cas, la fonction $x \to x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est continue. La fonction $x \to xy$ est aussi continue donc $x \to f(x, y)$ est le quotient de deux fonctions continues, la fonction du dénominateur ne s'annulant pas. C'est donc une fonction continue.

Deuxième cas : $y = 0$. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = f(x, 0) = 0$. La fonction $x \to f(x, y)$ est donc une fonction constante et elle est continue.

2. C'est le même raisonnement qu'en 1., en échangeant x et y.

3. Posons $x_n = y_n = \frac{1}{n}$. Alors, pour tout n, $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

Lorsque $n \to +\infty$, $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$ mais $f(x_n, y_n) \not\to f(0, 0) = 0$. La fonction f n'est donc pas continue.