

TD : Fonctions

Devoir

1. a) Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.

b) Donner un exemple d'ensembles E, F et G et de fonctions f, g telles que f est injective mais g ne l'est pas et $g \circ f$ non plus.

2. a) Calculer le développement limité de $f : x \rightarrow \frac{e^{x^2}}{\cos(x^2)+e^{x^4}}$ en 0 à l'ordre 6.

b) Calculer la limite de f en $-\infty$.

3. a) Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x - 1)\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}$. Montrer que le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 vaut :

$$f(x) = x + \frac{3x^2}{4} + \frac{37x^3}{96} + x^3\epsilon(x)$$

b) Montrer que $f'(x) = \frac{e^x(1+3e^x)}{2\sqrt{2}\sqrt{1+e^x}}$. En déduire que f est strictement croissante, puis qu'elle réalise une bijection de \mathbb{R} vers un intervalle I que l'on déterminera.

On note $f^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa réciproque.

c) On admet que f^{-1} possède un développement limité d'ordre 3 en 0. On le note $f^{-1}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x)$. Calculer $f^{-1}(0)$ et en déduire que $\alpha = 0$.

d) Montrer que le développement limité de $f \circ f^{-1}(x)$ en 0 vaut :

$$f \circ f^{-1}(x) = \beta x + \left(\gamma + \frac{3}{4}\beta^2\right)x^2 + \left(\delta + \frac{3}{2}\beta\gamma + \frac{37}{96}\beta^3\right)x^3 + x^3\epsilon(x)$$

e) En déduire que :

$$\begin{aligned}\beta &= 1 \\ \gamma + \frac{3}{4}\beta^2 &= 0 \\ \delta + \frac{3}{2}\beta\gamma + \frac{37}{96}\beta^3 &= 0\end{aligned}$$

Calculer β, γ et δ et donner l'expression du développement limité de $f^{-1}(x)$ en 0 à l'ordre 3.