Université Pierre et Marie Curie
LM110

Pour le 22 novembre 2012
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM110.html

TD : Fonctions

Corrigé du devoir

1. a) Pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$ car f est injective. Puisque g est injective, $g(f(x)) \neq g(f(y))$ donc $g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$. La fonction $g \circ f$ est donc injective.

b) Prenons $E = F = G = \mathbb{R}$. Soit $f : x \to x$ la fonction identité. Soit $g : x \to 0$ la fonction constante en 0. Alors, pour tout x, $g \circ f(x) = 0$ donc $g \circ f$ n'est pas injective, de même que g. Pourtant, f est injective car, si $x \neq y$, $f(x) = x \neq y = f(y)$.

2. a)
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{6} + x^6\epsilon(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + x^6\epsilon(x)$$
$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2} + x^6\epsilon(x) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^6\epsilon(x)$$
$$e^{x^4} = 1 + x^4 + x^6\epsilon(x)$$

Donc :

$$f(x) = \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + x^6\epsilon(x)}{2 + \frac{x^4}{2} + x^6\epsilon(x)} = \frac{1}{2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + x^6\epsilon(x))(1 + \frac{x^4}{4} + x^6\epsilon(x))^{-1}$$

Puisque $(1+X)^{-1} = 1 - X + X^2 + X^2\epsilon(X)$, on obtient, pour $X = \frac{x^4}{4} + x^6\epsilon(x)$:

$$(1 + \frac{x^4}{4} + x^6\epsilon(x))^{-1} = 1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{16} + x^8\epsilon(x) = 1 - \frac{x^4}{4} + x^6\epsilon(x)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + x^6\epsilon(x))(1 - \frac{x^4}{4} + x^6\epsilon(x)) \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{4} + x^6\epsilon(x)) \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{12} + x^6\epsilon(x)) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{24} + x^6\epsilon(x)
\end{aligned}$$

b) Divisons le numérateur et le dénominateur par e^{x^2} : $f(x) = \frac{1}{\cos(x^2)e^{-x^2} + e^{x^4 - x^2}}$

Quand $x \to -\infty$, $x^2 \to +\infty$ donc $e^{-x^2} \to 0$. Puisque $\cos(x^2) \in [-1;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-e^{-x^2} \leq \cos(x^2)e^{-x^2} \leq e^{-x^2}$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos(x^2)e^{-x^2} = 0$.
De plus, lorsque $x \to -\infty$, $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) \to +\infty$ (car $x^2 \to +\infty$) donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x^4-x^2} = +\infty$.
La limite de f en $-\infty$ est donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{(0) + (+\infty)} = 0$$

3. a)
$$\begin{aligned}(e^x - 1)\sqrt{\frac{1+e^x}{2}} &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) - 1)\sqrt{\frac{1+1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)}{2}} \\ &= (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x))\sqrt{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)}\end{aligned}$$

Le développement limité de $\sqrt{1+X}$ est $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + X^2\epsilon(X)$.
En posant $X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)} &= 1 + \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)}{2} - \frac{(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x))^2}{8} + x^2\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{32} + x^2\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32}\end{aligned}$$

Cela donne, pour le développement limité demandé :

$$\begin{aligned}(e^x - 1)\sqrt{\frac{1+e^x}{2}} &= (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x))\sqrt{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\epsilon(x)} \\ &= (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x))(1 + \frac{x}{4} + \frac{3x^2}{32} + x^2\epsilon(x)) \\ &= x + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^3}{32} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x) \\ &= x + \frac{3x^2}{4} + \frac{37x^3}{96} + x^3\epsilon(x)\end{aligned}$$

b) La fonction f est définie car $1 + e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est continue et dérivable car composée de fonctions continues et dérivables. Sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (e^x-1)'\sqrt{\frac{1+e^x}{2}} + (e^x-1)\left(\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}\right)' \\
&= e^x\sqrt{\frac{1+e^x}{2}} + (e^x-1)\left(\frac{1+e^x}{2}\right)'\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}} \\
&= e^x\sqrt{\frac{1+e^x}{2}} + (e^x-1)\frac{e^x}{2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}} \\
&= e^x\left(\sqrt{\frac{1+e^x}{2}} + \frac{e^x-1}{4\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}}\right) \\
&= e^x\left(\frac{4\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{4\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}} + \frac{e^x-1}{4\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}}\right) \\
&= e^x\frac{2+2e^x+e^x-1}{4\sqrt{1+e^x}/\sqrt{2}} = \frac{e^x(1+3e^x)}{2\sqrt{2}\sqrt{1+e^x}}
\end{aligned}$$

La dérivée de f est strictement positive car il s'agit d'un produit de facteurs positifs (e^x, $1+3e^x$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$). La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Puisque f est aussi continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.
Déterminons les limites en f en $+\infty$ et $-\infty$.
Quand $x\to-\infty$, $e^x\to 0$ donc, par composition :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (0-1)\sqrt{\frac{1+0}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quand $x\to+\infty$, $e^x\to+\infty$ donc $e^x-1\to+\infty$ et $\sqrt{\frac{1+e^x}{2}}\to+\infty$. Par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $I =]-\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$.

c) Puisque $f(0) = (e^0-1)\sqrt{\frac{1+e^0}{2}} = 0$, $0 = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0)$.
On va calculer α en utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$ (car f^{-1} est continue : on a admis dans le cours que la réciproque d'une fonction continue bijective définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ était continue).
Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x^3\epsilon(x) = 0$ puisque $f^{-1}(x) = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+x^3\epsilon(x)$, on a :

$$0 = \lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = \alpha+\beta.0+\gamma.0^2+\delta.0^3+0 = \alpha$$

On a donc bien $\alpha = 0$.
d) On sait que $f(X) = X + \frac{3X^2}{4} + \frac{37X^3}{96} + X^3\epsilon(X)$. Posons $X = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x)$.

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x)) \\ &= \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x) + \frac{3}{4}(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x))^2 \\ &\quad + \frac{37}{96}(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + x^3\epsilon(x))^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \frac{3}{4}(\beta^2 x^2 + 2\beta\gamma x^3) + \frac{37}{96}\beta^3 x^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= \beta x + (\gamma + \frac{3}{4}\beta^2)x^2 + (\delta + \frac{3}{2}\beta\gamma + \frac{37}{96}\beta^3)x^3 + x^3\epsilon(x) \end{aligned}$$

e) On a démontré à la question précédente :

$$x = f \circ f^{-1}(x) = \beta x + (\gamma + \frac{3}{4}\beta^2)x^2 + (\delta + \frac{3}{2}\beta\gamma + \frac{37}{96}\beta^3)x^3 + x^3\epsilon(x)$$

Puisque le développement limité est unique, les coefficients des développement limité x et $\beta x + (\gamma + \frac{3}{4}\beta^2)x^2 + (\delta + \frac{3}{2}\beta\gamma + \frac{37}{96}\beta^3)x^3 + x^3\epsilon(x)$ sont égaux, c'est-à-dire :

$$\begin{gathered} \beta = 1 \\ \gamma + \frac{3}{4}\beta^2 = 0 \\ \delta + \frac{3}{2}\beta\gamma + \frac{37}{96}\beta^3 = 0 \end{gathered}$$

On a donc $\beta = 1$, $\gamma = -\frac{3}{4}\beta^2 = -\frac{3}{4}$ et $\delta = -\frac{3}{2}\beta\gamma - \frac{37}{96}\beta^3 = \frac{9}{8} - \frac{37}{96} = \frac{71}{96}$.
Le développement limité de f^{-1} est donc :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{71}{96}x^3 + x^3\epsilon(x)$$