Université Pierre et Marie Curie — Le 6 décembre 2012
LM110

Contrôle continu : Fonctions

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Pour chaque exercice, les nombres entre crochets indiquent la répartition des points entre les différentes questions. Ce barême est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 : [Questions de cours] [1 - 1]

1. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante est injective.
2. Qu'est-ce-qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 2 : [1,5 - 1 - 1,5]

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $f''(x) = 4f'(x) - 4f(x)$.
2. a) Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \ln(\cos(x))$.

b) Résoudre l'équation différentielle $f'(x) = -\tan(x)f(x) + \cos(x)(1 + \tan^2(x))$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3 : [1 - 1,5 - 1,5]

On définit :

$$f(x, y) = \sqrt{e^{2x} - e^{y-x}}$$

1. Trouver le domaine de définition de f et en faire un dessin.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Calculer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point $(\frac{\ln(5)}{2}, \frac{\ln(5)}{2}, 2)$.

Exercice 4 : [1 - 1]

1. Calculer le développement limité en 1, à l'ordre 2, de la fonction $f(x) = e^{x^2}$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ quelconque. Calculer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction $f(x) = \frac{1}{x_0+x}$.

Exercice 5 : [1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1]

Soit $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - 1$.

a) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I qu'on déterminera.

c) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

d) Montrer que $f^{-1}(0) = 0$.

e) On suppose que f admet un développement limité en 0, à l'ordre 2, qu'on note $f^{-1}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^2\epsilon(x)$. Calculer α, β et γ.

f) La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Si non, sur quel intervalle est-elle dérivable ?

Exercice 6 : [1 - 1]

1. Simplifier le plus possible l'expression $f(x) = e^{\ln(\ln(x^2-x))} - \ln(x)$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et calculer f^{-1}.

Exercice 7 : [Bonus] [2]

Trouver la ou les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+y^2}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x,0) = x$$

[Indication : commencer par calculer, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, la dérivée de la fonction g_{x_0} : $t \to f(x_0 + \arctan t, t)$ et en déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la valeur de $g_{x_0}(t)$.]