Université Pierre et Marie Curie
LM110

Le 6 décembre 2012

Contrôle continu : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante quelconque. On veut montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que, si $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$, pour tous x et y réels.
Soient x et y quelconques tels que $x \neq y$. Si $x < y$, $f(x) < f(y)$ car f est strictement croissante donc $f(x) \neq f(y)$. Si on n'a pas $x < y$, alors $x > y$, puisque $x \neq y$. Comme f est strictement croissante, $f(x) > f(y)$ donc $x \neq y$.
Donc, si $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$. La fonction f est injective.

2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est continue, dérivable et si sa dérivée est continue.

Exercice 2 :

1. Le polynôme caractéristique associé à cette équation est $X^2 - 4X + 4$. Son déterminant est $\Delta = (-4)^2 - 4.4 = 0$. Le polynôme a donc une unique racine, $r = 2$.
Les solutions de l'équation différentielle sont, d'après le cours, toutes les fonctions de la forme :

$$f(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}$$

2. a) $g'(x) = \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.
b) Résolvons d'abord l'équation homogène $f'(x) = -\tan(x)f(x)$. La fonction $g = \ln(\cos(x))$ est une primitive de $-\tan(x)$, d'après le a), donc les solutions de l'équation homogène sont toutes les fonctions de la forme $f(x) = K\exp(\ln(\cos(x))) = K\cos(x)$.
Trouvons maintenant une solution particulière de l'équation par la méthode de la variation de la constante : on cherche la solution sous la forme $f_0(x) = K(x)\cos(x)$, où K est une fonction dérivable de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.
La fonction f_0 est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$f_0'(x) = -\tan(x)f_0(x) + \cos(x)(1 + \tan^2(x))$$

Puisque $f_0(x) = K(x)\cos(x)$, c'est équivalent à :

$$\begin{aligned} K'(x)\cos(x) - K(x)\sin(x) &= -\tan(x)K(x)\cos(x) + \cos(x)(1 + \tan^2(x)) \\ &= -\sin(x)K(x) + \cos(x)(1 + \tan^2(x)) \end{aligned}$$

C'est équivalent $K'(x)\cos(x) = \cos(x)(1+\tan^2(x))$. Comme cos ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, on peut diviser par $\cos(x)$ et on trouve que f_0 est solution si et seulement si :

$$K'(x) = 1 + \tan^2(x) = \tan'(x)$$

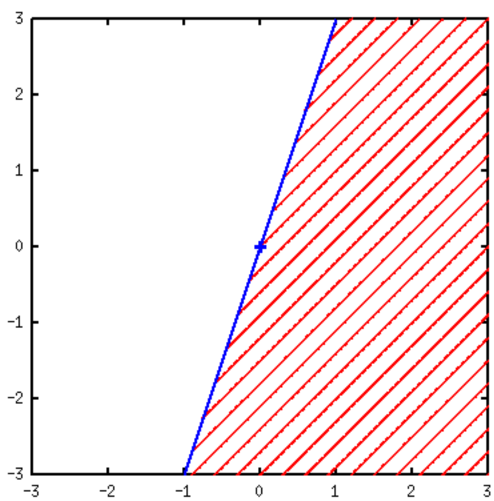
La fonction $K(x) = \tan(x)$ convient donc, ce qui donne comme solution particulière $f_0(x) = K(x)\cos(x) = \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$.
Les solutions sont la somme de la solution particulière et de n'importe quelle solution de l'équation homogène. Il s'agit donc des fonctions de la forme :

$$f(x) = K\cos(x) + \sin(x) \qquad K \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 :
1. $f(x,y)$ est définie si et seulement si $e^{2x} - e^{y-x} \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $e^{2x} \geq e^{y-x}$. Puisque l'exponentielle est une fonction strictement croissante :

$$\begin{aligned} & e^{2x} \geq e^{y-x} \\ \Leftrightarrow\ & 2x \geq y - x \\ \Leftrightarrow\ & y \leq 3x \end{aligned}$$

Le domaine de définition de f est donc $\{(x,y) \in \mathbb{R} \text{ tq } y \leq 3x\}$. Il s'agit de l'ensemble des points du plan situés en dessous de la droite d'équation $y = 3x$.



2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{2x} - e^{y-x})\frac{1}{2\sqrt{e^{2x} - e^{y-x}}} \\ &= \frac{2e^{2x} + e^{y-x}}{2\sqrt{e^{2x} - e^{y-x}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x}-e^{y-x})\frac{1}{2\sqrt{e^{2x}-e^{y-x}}}\\ &= \frac{-e^{y-x}}{2\sqrt{e^{2x}-e^{y-x}}}\end{aligned}$$

3. L'équation du plan tangent est :

$$z = f\left(\frac{\ln(5)}{2},\frac{\ln(5)}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\ln(5)}{2},\frac{\ln(5)}{2}\right)\left(x-\frac{\ln(5)}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\ln(5)}{2},\frac{\ln(5)}{2}\right)\left(y-\frac{\ln(5)}{2}\right)$$

Calculons les quantités nécessaires :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\ln(5)}{2},\frac{\ln(5)}{2}\right) &= \sqrt{e^{\ln(5)}-e^{0}} = \sqrt{5-1} = 2\\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\ln(5)}{2},\frac{\ln(5)}{2}\right) &= \frac{2e^{\ln(5)}+e^{0}}{2\sqrt{e^{\ln(5)}-e^{0}}} = \frac{11}{4}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\ln(5)}{2},\frac{\ln(5)}{2}\right) &= \frac{-e^{0}}{2\sqrt{e^{\ln(5)}-e^{0}}} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}z &= 2+\frac{11}{4}\left(x-\frac{\ln(5)}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(y-\frac{\ln(5)}{2}\right)\\ \Rightarrow 4z-11x+y &= 8-11\frac{\ln(5)}{2}+\frac{\ln(5)}{2} = 8-5\ln(5)\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. Posons $y = x-1$. On a alors $f(x) = \exp((y+1)^2) = \exp(1+2y+y^2) = e\times e^{2y+y^2}$.
Puisque $e^Y = 1+Y+\frac{Y^2}{2}+Y^2\epsilon(Y)$, on trouve, en posant $Y = 2y+y^2$:

$$\begin{aligned}f(x) &= e(1+(2y+y^2)+\frac{(2y+y^2)^2}{2}+y^2\epsilon(y))\\ &= e(1+2y+y^2+2y^2+y^2\epsilon(y))\\ &= e+2ey+3ey^2+y^2\epsilon(y)\\ &= e+2e(x-1)+3e(x-1)^2+(x-1)^2\epsilon(x-1)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x_0+x}\\ &= \frac{1}{x_0}\frac{1}{1+x/x_0}\\ &= \frac{1}{x_0}(1-\left(\frac{x}{x_0}\right)+\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+x^2\epsilon(x))\\ &= \frac{1}{x_0}-\frac{x}{x_0^2}+\frac{x^2}{x_0^3}+x^2\epsilon(x)\end{aligned}$$

Exercice 5 :

a) Les fonctions exp et $x \to 1+x^2$ sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, $1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{e^x}{1+x^2}$ est une fonction continue et dérivable. La fonction constante égale à 1 est continue et dérivable donc $f(x)$ est aussi continue et dérivable.

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(1+x^2) - e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

b) La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car c'est un produit de fonctions strictement positives. La fonction f est donc strictement croissante à la fois sur $]-\infty;1]$ et sur $[1;+\infty[$. Elle est donc strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$.

Remarque : si on veut justifier davantage la dernière affirmation, il faut montrer que, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. Si a et b appartiennent à $]-\infty;1]$ ou a et b appartiennent à $[1;+\infty[$, c'est vrai car f est strictement croissante sur ces intervalles. De plus, si a et b n'appartiennent pas tous les deux au même intervalle, puisque $a < b$, on doit avoir $a \in]-\infty;1[$ et $b \in]1;+\infty[$. Dans ce cas, $f(a) < f(1) < f(b)$ donc l'inégalité $f(a) < f(b)$ est aussi vraie.).

Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$.

Calculons les limites :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0}{1+(+\infty)} - 1 = -1$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{e^{-x} + x^2e^{-x}} - 1 = \frac{1}{0^+ + 0^+} - 1 = (+\infty) - 1 = +\infty$$

(On a utilisé le théorème de croissance comparée : $x^2e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$.)

La fonction f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;+\infty[$.

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x))(1+x^2)^{-1} - 1 \\ &= (1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x))(1 - x^2 + x^2\epsilon(x)) - 1 \\ &= 1 - x^2 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + x^2\epsilon(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \end{aligned}$$

d) $f(0) = \frac{e^0}{1+0^2} - 1 = 0$ donc $f^{-1}(0) = f^{-1}(f(0)) = 0$.

e) $f^{-1}(0) = \lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)$ car f^{-1} est continue. Donc :

$$0 = \lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 0} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^2\epsilon(x) = \alpha$$

Donc $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
x &= f(f^{-1}(x)) \\
&= f(\beta x + \gamma x^2 + x^2\epsilon(x)) \\
&= \beta x + \gamma x^2 + x^2\epsilon(x) - \frac{(\beta x + \gamma x^2 + x^2\epsilon(x))^2}{2} + x^2\epsilon(x) \\
&= \beta x + \gamma x^2 - \frac{\beta^2}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \\
&= \beta x + (\gamma - \frac{\beta^2}{2})x^2 + x^2\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Puisque le développement limité d'une fonction est unique, $\beta = 1$ et $\gamma - \frac{\beta^2}{2} = 0$ donc $\beta = 1$ et $\gamma = \frac{1}{2}$.

f) La fonction f^{-1} est dérivable en x si et seulement si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. La fonction f' s'annule uniquement en 1 donc f^{-1} est dérivable en x si et seulement si $f^{-1}(x) \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq f(1) = \frac{e}{2} - 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{e}{2} - 1\}$ (donc pas sur tout $\mathbb{R}$).

Exercice 6 :

1. $f(x) = e^{\ln(\ln(x^2-x))} - \ln(x) = \ln(x^2 - x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x^2-x}{x}\right) = \ln(x-1)$

2. La fonction f est définie, continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ (c'est la composée de deux fonctions strictement croissantes, $x \to x - 1$ et ln). Elle réalise donc une bijection de $]1; +\infty[$ vers $]\lim_{x\to 1^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}$.

Pour tout x,

$$\begin{aligned}
x = f(f^{-1}(x)) &= \ln(f^{-1}(x) - 1) \\
&\Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + e^x
\end{aligned}$$

Exercice 7 :

$$\begin{aligned}
g'_{x_0}(t) &= (x_0 + \arctan(t))' \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \arctan t, t) + (t)' \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \arctan t, t) \\
&= \frac{1}{1+t^2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \arctan t, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \arctan t, t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la première des deux égalités de l'énoncé, pour $x = x_0 + \arctan t$ et $y = t$.

Donc, pour tout x_0, la fonction g_{x_0} est constante. Calculons sa valeur :

$$g_{x_0}(t) = g_{x_0}(0) = f(x_0, 0) = x_0$$

Donc, pour tous t et x_0, $f(x_0 + \arctan t, t) = x_0$.
Utilisons cette égalité pour calculer $f(x, y)$, pour tout x, y. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ quelconques. Il faut trouver x_0 et t tels que $(x, y) = (x_0 + \arctan t, t)$. On prend $t = y$ et $x_0 = x - \arctan y$. On a alors :

$$f(x, y) = f(x_0 + \arctan t, t) = x_0 = x - \arctan y$$