Université Pierre et Marie Curie — Le 19 octobre 2012
LM110

Contrôle continu : Fonctions

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Barême indicatif : 1 point pour chacune des vingt questions des exercices 1 à 3 ; 2 points pour l'exercice bonus. Le barême exact sera fixé après correction des copies.
Si le sujet s'avère trop long, l'exercice 3 comptera également comme bonus.

Exercice 1 : [Questions de cours]

Les questions sont indépendantes.

1. Énoncer le lemme de Rolle.

2. Démontrer en utilisant le théorème des accroissements finis que si $f\ :]a;b[\to\mathbb{R}$ est une fonction continue et dérivable, de dérivée f' strictement positive sur $]a;b[$, alors f est strictement croissante.

3. Donner le développement limité de tan en 0, à l'ordre 3.

4. Résoudre l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Donner les valeurs ou les limites des fonctions suivantes aux points demandés.

$$\ln \text{ en } 0^+ \qquad \ln \text{ en } 1 \qquad \cos \text{ en } 0 \qquad \tan \text{ en } \frac{3\pi}{2}^-$$

Exercice 2 :

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x - 2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que f est définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est continue, dérivable et que $f'(x) = \frac{4x - 2e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$.

3. On pose $g(x) = 4x - 2e^{-2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$.

6. Montrer que $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$. (Indication : on pourra utiliser sans démonstration le fait que $e > 2$.)

7. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ ainsi que la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (Indication : on pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.)

8. Tracer approximativement le graphe de f.

9. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

10. On note $f^{-1} : [\frac{1}{2}; +\infty[\to \mathbb{R}^-$ la réciproque de f restreinte à $\mathbb{R}^-$. Montrer que $f^{-1}(1) = -\frac{1}{2}$.

11. On admet que f^{-1} est dérivable sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$. Montrer que $(f^{-1})'(1) = \frac{-(1+1/e)}{2}$.

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable telle que f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Nous allons démontrer certaines propriétés d'une telle fonction.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on démontre « l'inégalité de convexité » : $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

a) Montrer que si $x = y$, $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

b) On suppose maintenant $x < y$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\frac{f(\frac{x+y}{2})-f(x)}{(y-x)/2} \leq \frac{f(y)-f(\frac{x+y}{2})}{(y-x)/2}$. En déduire que $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

c) Montrer que, si $x > y$, $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est monotone sur $[x_0; +\infty[$. (Indication : distinguer les deux cas suivants. Premier cas : $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Deuxième cas : il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \geq 0$.)

Exercice 4 : [Bonus]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et que f' admet une limite finie l en 0. Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$.
(Indication : utiliser le théorème des accroissements finis.)