Université Pierre et Marie Curie Le 19 octobre 2012
LM110

Contrôle continu : Fonctions

Corrigé

Exercice 1 :

1. Lemme de Rolle : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a; b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Nous voulons montrer que f est strictement croissante. Il faut donc montrer que, pour tous les x et y appartenant à $]a; b[$, si on a $x < y$, alors on a aussi $f(x) < f(y)$.
Supposons donc que x et y sont deux réels appartenant à $]a; b[$ tels que $x < y$. On va montrer que $f(x) < f(y)$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x; y[$ tel que $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Puisque f' est strictement positive :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$

Comme $y - x > 0$, on peut multiplier par $(y - x)$ les deux côtés de l'inégalité et on obtient :

$$f(y) - f(x) > 0$$

Puisque $f(y) - f(x) > 0$, $f(y) > f(x)$. C'était ce que nous voulions démontrer.

3. Les développements limités de sin et cos à l'ordre 3 sont les suivants :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \epsilon(x)x^3$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \epsilon(x)x^3$$

Puisque $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$, il faut calculer le DL de $\frac{1}{\cos(x)}$.
On a $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\epsilon(x)x^3}$.

Or on sait que $\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \epsilon(X)X^2$. En posant $X = \frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + (\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3) + (\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3)^2 + \epsilon(\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3)(\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3)^2 \\
&= 1 + (\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3) + (\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3)^2 + \epsilon(x)(\frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3)^2 \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} - \epsilon(x)x^3 + \frac{x^4}{4} - x^5\epsilon(x) + x^6\epsilon^2(x) + \frac{x^4}{4}\epsilon(x) - x^5\epsilon^2(x) + x^6\epsilon^3(x) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \epsilon(x)x^3
\end{aligned}$$

Cela donne le DL suivant :

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \sin(x) \times \left(\frac{1}{\cos(x)}\right) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \epsilon(x)x^3)(1 + \frac{x^2}{2} + \epsilon(x)x^3) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \epsilon(x)x^3 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5\epsilon(x)}{2} + \epsilon(x)x^4 - \frac{\epsilon(x)x^6}{6} + \epsilon^2(x)x^6 \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \epsilon(x)x^3 \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \epsilon(x)x^3
\end{aligned}$$

4. Remarquons tout d'abord que $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut donc récrire l'équation $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous la forme $\sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{3})$ et appliquer la dernière propriété des rappels du TD du 4 octobre :

$$\begin{aligned}
\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(x) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } \sin(x) \equiv \pi - (-\frac{\pi}{3})[2\pi] \\
&\Leftrightarrow \sin(x) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } \sin(x) \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]
\end{aligned}$$

5. $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \ln(1) = 0 \qquad \cos(0) = 1$
$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \sin(x) = -1$ et $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^-$ donc :

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \tan(x) = «\frac{-1}{0^-}» = +\infty$$

Exercice 2 :

1. La fonction f est un quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$, ce qui implique que $e^x + e^{-x} \neq 0$. Le dénominateur de f ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$ et f est définie sur tout $\mathbb{R}$.

2. La fonction e^x est continue et dérivable, la fonction $x \to e^{-x}$ également. La fonction $x \to x$ est continue et dérivable. La fonction $x \to xe^{-x}$ est donc également continue et dérivable (car produit de telles fonctions).
Les fonctions $x \to e^x - 2xe^{-x}$ et $x \to e^x + e^{-x}$ sont continues et dérivables car elles sont sommes de fonctions continues et dérivables. La fonction f est donc continue et dérivable puisqu'il s'agit du quotient de deux fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, d'après la question 1.
Calculons f'. On définit $u(x) = e^x - 2xe^{-x}$ et $v(x) = e^x + e^{-x}$. Avant de calculer f', il faut calculer u' et v'.

$$u'(x) = (e^x)' - (2xe^{-x})' = e^x - ((2x)'e^{-x} + (2x)(e^{-x})') = e^x - 2e^{-x} + 2xe^{-x}$$
$$v'(x) = e^x - e^{-x}$$

La dérivée de $f = \frac{u}{v}$ vaut donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{(e^x - 2e^{-x} + 2xe^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - 2xe^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^{2x} + 1 - 2 - 2e^{-2x} + 2x + 2xe^{-2x}) - (e^{2x} - 2x - 1 + 2xe^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{4x - 2e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

3. On a $g'(x) = 4 + 4e^{-2x}$. Puisque l'exponentielle est une fonction strictement positive, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 4 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est donc de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Lorsque $x \to +\infty$, $x \to +\infty$ et $e^{-2x} \to 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
Lorsque $x \to -\infty$, $x \to -\infty$ et $e^{-2x} \to +\infty$ donc $-2e^{-2x} \to -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
5. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{x \to -\infty} g(x); \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)[=] - \infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
Ainsi, g est surjective donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$. Ce α est unique car g est injective.
6. $g(0) = -2 < 0$. Supposons d'abord, par l'absurde, que $\alpha \leq 0$. Alors, puisque g est strictement croissante, $g(\alpha) \leq g(0)$. Puisque $g(\alpha) = 0$, $0 \leq g(0)$. C'est impossible car on a vu que $0 > g(0)$. Donc l'hypothèse $\alpha \leq 0$ est impossible et on doit avoir $\alpha > 0$.
On effectue le même raisonnement pour montrer que $\alpha < \frac{1}{2}$.
$g(\frac{1}{2}) = 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{2}{e}$. Puisque $e > 2$, $\frac{2}{e} < 1$ donc $g(\frac{1}{2}) > 2 - 1 = 1 > 0$. Puisque g est strictement croissante, si $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $0 = g(\alpha) \geq g(\frac{1}{2}) > 0$, ce qui est absurde. Donc $\alpha < \frac{1}{2}$.
Ainsi, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

7. La fonction g est strictement croissante et s'annule en α. Puisque $(e^x + e^{-x})^2$ est toujours positive, le signe de f' est le même que le signe de g. On obtient donc le tableau suivant :

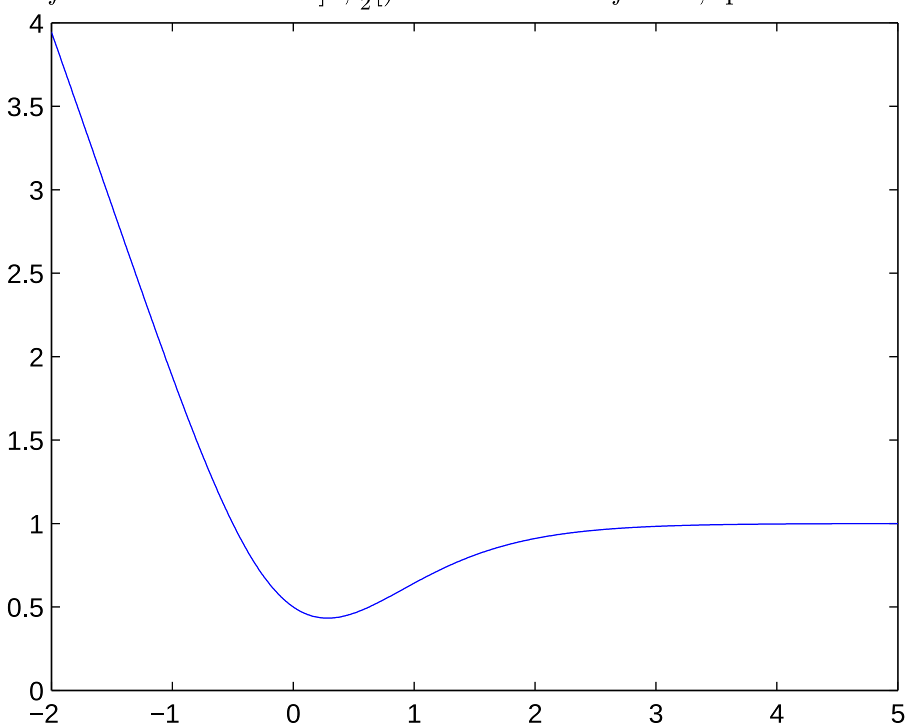
	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Calculons les limites de f en $\pm\infty$.
Si on multiplie le numérateur et le dénominateur de f par e^{-x}, on trouve que $f(x) = \frac{1-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
Lorsque $x \to +\infty$, $2x \to +\infty$ donc, par composition des limites $2xe^{-2x} \to 0$. On a aussi $e^{-2x} \to 0$.
Donc :

$$1 - 2xe^{-2x} \to 1 \qquad 1 + e^{-2x} \to 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$$

En multipliant par e^x le numérateur et le dénominateur de f, on trouve que $f(x) = \frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}+1}$.
Lorsque $x \to -\infty$, $e^{2x} - 2x \to +\infty$ (car $e^{2x} \to 0$ et $-2x \to +\infty$) et $e^{2x} + 1 \to 1$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{+\infty}{1} = +\infty$.
8. Quatre éléments doivent apparaître sur le graphique : la limite de f en $-\infty$ (qui est $+\infty$), la limite de f en $+\infty$ (qui est 1), le sens de variation de f (en n'oubliant pas que le minimum de f est atteint en $\alpha \in]0; \frac{1}{2}[$) et la valeur de f en 0, qui est facile à calculer et vaut $\frac{1}{2}$.



9. D'après le tableau de variations de la question 7., f est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}^-$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $[f(0); \lim_{x\to-\infty} f(x)[= [\frac{1}{2}; +\infty[$.

10. $f(-\frac{1}{2}) = \frac{e^{-1/2}+e^{-1/2}}{e^{-1/2}+e^{-1/2}} = 1$ donc $f^{-1}(1) = f^{-1}(f(-\frac{1}{2})) = -\frac{1}{2}$.

11. Puisque $f \circ f^{-1} = Id$, on obtient, en dérivant cette égalité, $(f^{-1})' \times f' \circ f^{-1} = 1$ donc $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

En appliquant cette égalité au point 1 et en utilisant l'expression de f' trouvée à la question 2., on obtient :

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-\frac{1}{2})} = \frac{(e^{-1/2}+e^{1/2})^2}{-2-2e} = -\frac{1}{2}\frac{((1+e)e^{-1/2})^2}{1+e} = -\frac{(1+e)e^{-1}}{2} = \frac{-(1+1/e)}{2}$$

Exercice 3 :

1. a) Si $x = y$, $f(\frac{x+y}{2}) = f(\frac{2x}{2}) = f(x) = \frac{f(x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

b) Comme $x < y$, $x < \frac{x+y}{2} < y$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in]x; \frac{x+y}{2}[$ tel que $f'(c_1) = \frac{f((x+y)/2)-f(x)}{(x+y)/2-x} = \frac{f(\frac{x+y}{2})-f(x)}{(y-x)/2}$.

De même, il existe $c_2 \in]\frac{x+y}{2}; y[$ tel que $f'(c_2) = \frac{f(y)-f((x+y)/2)}{y-(x+y)/2} = \frac{f(y)-f(\frac{x+y}{2})}{(y-x)/2}$.

Puisque $c_1 < \frac{x+y}{2} < c_2$ et puisque f' est croissante, $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ donc :

$$\frac{f(\frac{x+y}{2})-f(x)}{(y-x)/2} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(y)-f(\frac{x+y}{2})}{(y-x)/2}$$

Puisque $\frac{y-x}{2} > 0$, on peut multiplier l'inégalité par $\frac{y-x}{2}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} f(\frac{x+y}{2}) - f(x) &\leq f(y) - f(\frac{x+y}{2}) \\ \Rightarrow 2f(\frac{x+y}{2}) &\leq f(x)+f(y) \\ \Rightarrow f(\frac{x+y}{2}) &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \end{aligned}$$

c) Si $x > y$, on pose $Y = x$ et $X = y$. D'après la question précédente, puisque $X < Y$, $f(\frac{X+Y}{2}) \leq \frac{f(X)+f(Y)}{2}$.

Donc $f(\frac{x+y}{2}) = f(\frac{X+Y}{2}) \leq \frac{f(X)+f(Y)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

(On peut aussi refaire le raisonnement de la question b) en échangeant x et y.)

2. Premier cas : $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est strictement décroissante sur tout $\mathbb{R}$. Choisissons n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$. f est strictement décroissante donc monotone sur $[x_0; +\infty[\subset \mathbb{R}$.

Deuxième cas : il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \geq 0$. Alors, puisque f' est croissante, $f'(x) \geq f'(x_0) \geq 0$ pour tout $x \geq x_0$. Donc, sur $[x_0; +\infty[$, f' est positive et f est croissante. Donc f est monotone sur $[x_0; +\infty[$.

Exercice 4 :

Soit $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ quelconque. D'après le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[0; x]$ (ou sur $[x; 0]$ si $x < 0$) et dérivable sur $]0; x[$ (respectivement $]x; 0[$), il existe $c_x \in]0; x[$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$.
Lorsque $x \to 0$, $c_x \to 0$ (puisque $c_x \in]0; x[$, ce qui implique que $-|x| \leq c_x \leq |x|$) donc $f'(c_x) \to l$, par composition des limites.
Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = l$ et f est bien dérivable en 0 de dérivée l.