Université Pierre et Marie Curie — Le 5 avril 2013
LM125 — http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Rappel :
Le déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est caractérisé par les trois propriétés suivantes :
- $\det I_n = 1$
- $\det M = 0$ si deux colonnes de M sont identiques.
- Si $k \in \{1, ..., n\}$, $C_1, ..., C_n, D_k$ sont des matrices colonnes de taille n et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\det\Big(C_1|C_2|...|\lambda C_k + \mu D_k|...|C_n\Big) = \lambda \det\Big(C_1|C_2|...|C_k|...|C_n\Big) + \mu \det\Big(C_1|C_2|...|D_k|...|C_n\Big)$$

Il vérifie les propriétés suivantes :
1 - Ajouter à une colonne un vecteur proportionnel à une autre colonne ne change pas la valeur du déterminant :

$$\forall i \neq j, \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \det(C_1|...|C_n) = \det(C_1|...|C_i|...|C_j + \alpha C_i|...|C_n)$$

De même, ajouter à une ligne un vecteur proportionnel à une autre ligne ne change pas la valeur du déterminant.
2 - Si on note $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $j \leq n$:

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}(-1)^{i+j} \det A_{i,j} \qquad \text{(Développement selon la colonne } j\text{)}$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en retirant à A la ligne i et la colonne j.
De même, pour tout $i \leq n$:

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}(-1)^{i+j} \det A_{i,j} \qquad \text{(Développement selon la ligne } i\text{)}$$

3 - $\det M^T = \det M$
4 - $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
5 - $\det M \neq 0$ si et seulement si M est inversible.
6 - $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
7 - Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure : $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & ... & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & ... & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 ... \lambda_n$

Exercice 1 :
1. Dans cette question, on calcule le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $\det A = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. [Indication : développer par rapport à la troisième colonne.]
c) Calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
d) Calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire la valeur de $\det A$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$ quelconque. On note :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -m \\ m+1 & 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $\det A_m$.
b) Indiquer pour quelles valeurs de m la matrice A_m est inversible.

Exercice 2 : [Difficile]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On appelle permutation de $\{1,...,n\}$ une application bijective $\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,...,n\}$.
Pour tous $i, j \in \{1,...,n\}$ tels que $i \neq j$, on appelle transposition (i,j) la permutation suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(k) &= k \text{ si } k \neq i, k \neq j \\ &= j \text{ si } k = i \\ &= i \text{ si } k = j \end{aligned}$$

On admet que, pour toute permutation σ, il existe une suite finie $(i_1, j_1), ..., (i_s, j_s)$ telle que :

$$\sigma = \tau_{i_s,j_s} \circ ... \circ \tau_{i_1,j_1}$$

On appelle signature de σ l'entier $\epsilon(\sigma) = (-1)^s \in \{-1; 1\}$. On admet qu'il est bien défini (malgré le fait que la suite des (i_k, j_k) n'est pas nécessairement unique).

1. On note $E_1, ..., E_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ...
a) Soient $r_1, ..., r_n \in \{1,...,n\}$. Montrer que, si $\det(E_{r_1}|E_{r_2}|...|E_{r_n}) \neq 0$, alors $\sigma : k \to r_k$ est une permutation.
b) Soient $C_1, ..., C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconques. Montrer que, pour tous $i, j \in \{1,...,n\}$ avec $i \neq j$, $\det(C_{\tau_{ij}(1)}|C_{\tau_{ij}(2)}|...|C_{\tau_{ij}(n)}) = -\det(C_1|C_2|...|C_n)$.
c) Montrer que, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det(E_{\sigma(1)}|E_{\sigma(2)}|...|E_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque, dont on note $(M_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients. On note $C_1, ..., C_n$ les colonnes de M.
a) Montrer par récurrence sur K allant de 0 à n que :

$$\det M = \sum_{r_1,...,r_K \in \{1,...,n\}} M_{r_1,1} ... M_{r_K,K} \det(E_{r_1}|...|E_{r_K}|C_{K+1}|...|C_n)$$

b) En déduire que :

$$\det M = \sum_{r_1,...,r_n \in \{1,...,n\}} M_{r_1,1} ... M_{r_n,n} \det(E_{r_1}|...|E_{r_n})$$

c) Montrer que $\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) M_{\sigma(1),1} ... M_{\sigma(n),n}$.

3. Montrer que $\det M = \det M^T$.

Exercice 3 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit $M_m = \begin{pmatrix} -m-1 & m+2 & -1 & -1 \\ -m+1 & m & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2m & -2m & m & m \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $\det M_m$ en fonction de m.
b) Indiquer pour quelles valeurs de m la matrice M_m est inversible.
2. On appelle $f_m : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la représentation dans la base canonique est M_m. Déterminer le rang de f_m en fonction de m.
3. Dans cette question, on suppose que $m = 0$.
a) Donner une base de $\operatorname{Im} f_m$.
b) Calculer une base de $\operatorname{Ker} f_m$.
c) $\operatorname{Im} f_m$ et $\operatorname{Ker} f_m$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4 :

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit :

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \to & AM \end{array}$$

1. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

a) Calculer $f_A(E_{11}), f_A(E_{21}), f_A(E_{12}), f_A(E_{22})$ en fonction de a, b, c, d.
b) Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)$.
3. Calculer $\det f_A$ et l'exprimer en fonction de $\det A$.