Université Pierre et Marie Curie
LM125

Le 5 avril 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) Soustraire la quatrième colonne à la troisième ne change pas la valeur du déterminant (propriété 1).

b) On développe par rapport à la troisième colonne ($j = 3$ dans la propriété 2) :

$$\begin{aligned}\det A &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{1+3}.0.\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3}.0.\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3}.2.\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{4+3}.1.\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c) On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}.1.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}.0.\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}.2.\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'après la propriété 6, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.0 - 1.1 = -1$ et $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.1 - 1.1 = -1$.
Donc $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -3$.

d) On développe par rapport à la première ligne et on procède comme à la question précédente :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} &= 1.\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2.\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -3 + 2.1 = -1\end{aligned}$$

On insère ce résultat et celui de la question 1.c) dans l'égalité de la question 1.b) et on obtient $\det A = -5$.

2. a) On commence par soustraire la deuxième colonne à la première :

$$\det A_m = \det\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ m & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque la première colonne de la matrice obtenue vaut $\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a, par linéarité par rapport à la première colonne :

$$\det\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ m & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = m\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on développe par rapport à la troisième ligne :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m^2 - m$$

De même :

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -m \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -m + 1$$

Donc $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$ et $\det A_m = m \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -m \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = m(m-1)^2$.

b) A_m est inversible si et seulement si $m(m-1)^2 \det A_m \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si m ne vaut ni 0 ni 1.

Exercice 2 :

1. a) Si $\det(E_{r_1}|...|E_{r_n}) \neq 0$, les r_k sont tous différents (sinon, la matrice aurait deux colonnes identiques et le déterminant serait nul). Comme il y en a n, ils doivent prendre toutes les valeurs de 1 à n.
Donc $\sigma : k \to r_k$ est injective et surjective. Elle est bijective. C'est une permutation.

b) $(C_{\tau_{ij}(1)}|...|C_{\tau_{ij}(n)})$ est la même matrice que $(C_1|...|C_n)$ après échange des colonnes C_i et C_j.

c) D'après la question b), si λ est une permutation et $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i \neq j$, alors $\det(E_{\tau_{i,j}\circ\lambda(1)}|...|E_{\tau_{i,j}\circ\lambda(n)}) = -\det(E_{\lambda(1)}|...|E_{\lambda(n)})$.
Donc en procédant par récurrence sur s, si $\sigma = \tau_{i_s,j_s} \circ ... \circ \tau_{i_1,j_1} (\circ \mathrm{Id})$:

$$\det(E_{\sigma(1)}|...|E_{\sigma(n)}) = (-1) \times ... \times (-1) \det(E_1|...|E_n) = (-1)^s \det I_n = \epsilon(\sigma)$$

2. a) Pour $K = 0$, l'égalité est juste $\det M = \det(C_1|...|C_n)$.
Si c'est vrai pour $K < n$, pour $K + 1$:

$$\begin{aligned}
\det M &= \sum_{r_1,...,r_K \in \{1,...,n\}} M_{r_1,1}...M_{r_K,K} \det(E_{r_1}|...|E_{r_K}|C_{K+1}|...|C_n) \\
&= \sum_{r_1,...,r_K \in \{1,...,n\}} M_{r_1,1}...M_{r_K,K} \det(E_{r_1}|...|E_{r_K}|M_{1,K+1}E_1 + ... + M_{n,K+1}E_n|C_{K+2}|...|C_n) \\
&= \sum_{r_1,...,r_K \in \{1,...,n\}} M_{r_1,1}...M_{r_K,K} \left(\sum_{r_{K+1}=1}^{n} M_{r_{K+1},K+1} \det(E_{r_1}|...|E_{r_K}|E_{r_{K+1}}|C_{K+2}|...|C_n) \right) \\
&= \sum_{r_1,...,r_K,r_{K+1} \in \{1,...,n\}} M_{r_1,1}...M_{r_K,K} M_{r_{K+1},K+1} \det(E_{r_1}|...|E_{r_K}|E_{r_{K+1}}|C_{K+2}|...|C_n)
\end{aligned}$$

b) C'est l'égalité de la question précédente pour $K = n$.
c) D'après la question 1.a), puisqu'on peut ne garder dans la somme que les $r_1, ..., r_n$ tels que $\det(E_{r_1}|...|E_{r_n}) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{\substack{r_1,...,r_n \in \{1,...,n\} \\ \text{tq } (k \to r_k) \in \mathfrak{S}_n}} M_{r_1,1}...M_{r_n,n} \det(E_{r_1,1}|...|E_{r_n,n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} M_{\sigma(1),1}...M_{\sigma(n),n} \det(E_{\sigma(1),1}|...|E_{\sigma(n),n})\end{aligned}$$

En utilisant 1.c), on trouve le résultat demandé.
3. Pour toute permutation σ :

$$\begin{aligned}M_{\sigma(1),1}...M_{\sigma(n),n} &= \prod_{i,j \text{ tq } i=\sigma(j)} M_{i,j} \\ &= \prod_{i,j \text{ tq } j=\sigma^{-1}(i)} M_{i,j} \\ &= M_{1,\sigma^{-1}(1)}...M_{n,\sigma^{-1}(n)}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\det M &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) M_{1,\sigma^{-1}(1)}...M_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon((\sigma^{-1})^{-1}) M_{1,\sigma^{-1}(1)}...M_{n,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \epsilon((\sigma')^{-1}) M_{1,\sigma'(1)}...M_{n,\sigma'(n)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \epsilon((\sigma')^{-1}) M^T_{\sigma'(1),1}...M^T_{\sigma'(n),n} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma') M^T_{\sigma'(1),1}...M^T_{\sigma'(n),n} \\ &= \det M^T\end{aligned}$$

Pour l'avant-dernière égalité, on a utilisé le fait que $\epsilon(\sigma') = \epsilon((\sigma')^{-1})$: si $\sigma' = \tau_{i_s,j_s} \circ ... \circ \tau_{i_1,j_1}$, $(\sigma')^{-1} = \tau^{-1}_{i_1,j_1} \circ ... \circ \tau^{-1}_{i_s,j_s} = \tau_{i_1,j_1} \circ ... \circ \tau_{i_s,j_s}$ donc le nombre de transpositions est le même pour σ' et $(\sigma')^{-1}$, ce qui implique que les signatures sont identiques.