

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 3 :

1. a) On commence par ajouter la deuxième colonne à la première :

$$\det M_m = \det \begin{pmatrix} 1 & m+2 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2m & m & m \end{pmatrix}$$

On ajoute la première à la quatrième :

$$\det M_m = \det \begin{pmatrix} 1 & m+2 & -1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2m & m & m \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la quatrième colonne :

$$\det M_m = m(-1)^8 \det \begin{pmatrix} 1 & m+2 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = m \det \begin{pmatrix} 1 & m+2 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On ajoute la première ligne à la troisième :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & m+2 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la troisième colonne :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & m \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & m \end{pmatrix} = 2m - m = m$$

Donc $\det M_m = m^2$.

b) M_m est inversible si et seulement si $\det M_m \neq 0$, soit $m^2 \neq 0$, soit $m \neq 0$.

2. Si $m \neq 0$, d'après la question 1.b), M_m est inversible, c'est-à-dire que f_m est aussi inversible donc $\text{Im } f_m = \mathbb{R}^4$ tout entier et $\text{rang } f_m = 4$.

Il faut traiter séparément le cas $m = 0$. Dans ce cas :

$$M_m = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons une base de $\text{Im } f_m$. Chaque colonne de M_m représente l'image d'un des vecteurs de la base canonique. On peut en déduire l'image de chaque élément de la base canonique :

$$\begin{aligned} f_m((1, 0, 0, 0)) &= (-1, 1, 3, 0) & f_m((0, 1, 0, 0)) &= (2, 0, -2, 0) \\ f_m((0, 0, 1, 0)) &= (-1, 0, 1, 0) & f_m((0, 0, 0, 1)) &= (-1, -1, -1, 0) \end{aligned}$$

Puisque l'image par f_m d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ est une famille génératrice de $\text{Im } f_m$:

$$\text{Im } f_m = \text{Vect} \{(-1, 1, 3, 0), (2, 0, -2, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, -1, -1, 0)\}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et appliquons à cette matrice l'algorithme de Gauss.

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_1, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_2, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2/2, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisqu'appliquer aux lignes des opérations élémentaires ne change pas l'espace vectoriel engendré par ces lignes :

$$\text{Im } f_m = \text{Vect} \{(-1, 1, 3, 0), (0, 1, 2, 0)\}$$

De plus, la famille $\{(-1, 1, 3, 0), (0, 1, 2, 0)\}$ est libre : si $\lambda_1(-1, 1, 3, 0) + \lambda_2(0, 1, 2, 0) = (0, 0, 0, 0)$, alors $(-\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2, 0) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

C'est une famille libre et génératrice de $\text{Im } f_m$. C'est donc une base. Donc $\text{Im } f_m$ est de dimension 2 : elle a une base à 2 éléments. Donc $\text{rang } f_m = 2$.

3. a) On en a calculé une à la question 2. : $\{(-1, 1, 3, 0), (0, 1, 2, 0)\}$.

b) On a trouvé en 2., pour $m = 0$:

$$\begin{aligned} f_m((1, 0, 0, 0)) &= (-1, 1, 3, 0) & f_m((0, 1, 0, 0)) &= (2, 0, -2, 0) \\ f_m((0, 0, 1, 0)) &= (-1, 0, 1, 0) & f_m((0, 0, 0, 1)) &= (-1, -1, -1, 0) \end{aligned}$$

Donc $f_m((w, x, y, z)) = w(-1, 1, 3, 0) + x(2, 0, -2, 0) + y(-1, 0, 1, 0) + z(-1, -1, -1, 0) = (-w + 2x - y - z, w - z, 3w - 2x + y - z, 0)$. Le noyau est l'ensemble des (w, x, y, z) satisfaisant :

$$-w + 2x - y - z = 0$$

$$w - z = 0$$

$$3w - 2x + y - z = 0$$

Réolvons ce système. La matrice augmentée est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2/2, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow -L_1, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont donc les $(z, y/2 + z, y, z)$:

$$\text{Ker } f_m = \{y(0, 1/2, 1, 0) + z(1, 1, 0, 1) \text{ tq } y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(0, 1/2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$$

La famille $\{(0, 1/2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ est libre : si $\lambda_1(0, 1/2, 1, 0) + \lambda_2(1, 1, 0, 1) = 0$, alors $(0, 0, 0, 0) = (\lambda_2, \lambda_1/2 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Puisqu'elle est libre et génératrice de $\text{Ker } f_m$, c'est une base de $\text{Ker } f_m$.

c) $\text{Im } f_m$ et $\text{Ker } f_m$ sont supplémentaires si et seulement si en concaténant les bases trouvées au question 3.a) et 3.b), on obtient une base de $\mathbb{R}^4$. Il faut donc savoir si $\{(-1, 1, 3, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 1/2, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Puisque c'est une famille à 4 éléments et $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, il suffit de déterminer si elle est libre.

On pourrait faire le calcul par la méthode générale mais, ici, on voit facilement que $0 \cdot (-1, 1, 3, 0) + 1 \cdot (0, 1, 2, 0) + (-2) \cdot (0, 1/2, 1, 0) + 0 \cdot (1, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$. La famille n'est donc pas libre. Ce n'est pas une base. $\text{Im } f_m$ et $\text{Ker } f_m$ ne sont pas supplémentaires.

Exercice 4 :

1. Il faut montrer que c'est une application linéaire (un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est, par définition, une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} f_A(\lambda M_1 + \mu M_2) &= A(\lambda M_1 + \mu M_2) \\ &= \lambda A M_1 + \mu A M_2 \\ &= \lambda f_A(M_1) + \mu f_A(M_2) \end{aligned}$$

$$2. \text{ a) } f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}f_A(E_{21}) &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\f_A(E_{12}) &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \\f_A(E_{22}) &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b) D'après la question a), $f_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{21} + 0.E_{12} + 0.E_{22}$.

De même, $f_A(E_{21}) = bE_{11} + dE_{21}$.

$$f_A(E_{12}) = aE_{12} + cE_{22}$$

$$f_A(E_{22}) = bE_{12} + dE_{22}$$

$$\text{Donc } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}.$$

3. On développe par rapport à la première colonne :

$$\det f_A = a \det \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} - c \det \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

On développe les déterminants des matrices plus petites par rapport à la première colonne :

$$\det \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} = d \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = d \det A \quad \det \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} = b \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = b \det A$$

Donc :

$$\det f_A = ad \det A - bc \det A = (ad - bc) \det A = (\det A)^2$$