TD : Algèbre

Exercice 1 :

Calculer les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$$

Exercice 2 :

On suppose que la météo obéit aux règles suivantes :
i) S'il pleut un jour, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est de $0,6$ et la probabilité qu'il ne pleuve pas de $0,4$.
ii) S'il ne pleut pas un jour, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est de $0,2$ et la probabilité qu'il ne pleuve pas de $0,8$.
On note p_0 la probabilité qu'il pleuve le 7 février et q_0 celle qu'il ne pleuve pas. On note p_1 et q_1 ces mêmes probabilités pour le 8 février, p_2 et q_2 celles du 9 et ainsi de suite.
On sait qu'il pleut le 7 février. On a donc $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,2q_n$ et $q_{n+1} = 0,4p_n + 0,8q_n$.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

3. On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. Montrer que $N = M^{-1}$.
4. Montrer que $A = M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} \times N$.
5. Calculer A^2.
6. Donner l'expression générale de A^n pour tout $n \geq 0$.
7. En déduire les valeurs de p_n et q_n pour tout $n \geq 0$. Donner la limite de chaque suite.

Exercice 3 :

On appelle *application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forme suivante :

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Si f est une application de cette forme, on dit que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est sa *matrice associée.*

1. Quelle est la matrice associée à l'application $f(x, y) = (x, y)$?

2. Soit f une application linéaire : $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Soit M sa matrice associée. Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$. On note $f(x_0, y_0) = (x', y')$. Calculer $M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ en fonction de x' et y'.

3. Soient f et g deux applications linéaires :

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$
$$g(x, y) = (a'x + b'y, c'x + d'y)$$

On note M_f et M_g les matrices associées.
a) Calculer $f \circ g$.
b) Calculer la matrice associée à $f \circ g$ en fonction de M_f et M_g.

4. [Difficile] En utilisant l'associativité de la composition des fonctions, démontrer que la multiplication des matrices 2×2 est associative.

Exercice 4 :

Soient A, B, C trois matrices carrés de taille n.

1. On suppose que A, B et C sont inversibles. On note A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} leurs inverses.
a) Montrer que AB est inversible et calculer son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1}.
b) Même question pour ABC.
c) Même question pour A^n, pour tout entier $n \geq 0$.

2. On suppose maintenant que A est inversible mais pas B. On va montrer qu'alors, AB n'est pas inversible. On raisonne par l'absurde en supposant que AB est inversible, d'inverse $(AB)^{-1}$.
a) Que vaut $((AB)^{-1}A)B$?
b) Que vaut $A^{-1}AB((AB)^{-1}A)$? En déduire la valeur de $B((AB)^{-1}A)$.
c) Conclure.

Exercice 5 :

1. Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible et, si oui, calculer son inverse :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $M_\alpha = \left(\begin{smallmatrix} -3 & \alpha \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Dire pour quelles valeurs de α la matrice M_α est inversible et, pour ces valeurs, calculer M_α^{-1} en fonction de α.

Exercice 6 :

1. Soient a, b, c des réels. On note $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$.
Dire à quelle condition sur a, b, c la matrice M est inversible. Dans le cas où cette condition est vérifiée, donner l'expression de M^{-1} en fonction de a, b, c. Remarquer en particulier que M^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.

2. [Difficile] Soit A une matrice triangulaire supérieure, de taille $n \times n$. On note $(a_{k,l})$ ses coefficients. Puisqu'elle est triangulaire supérieure, $a_{k,l} = 0$ si $k > l$.
On suppose que A est inversible et on note $(b_{k,l})$ les coefficients de A^{-1}.
On va montrer que A^{-1} est triangulaire supérieure et que les coefficients $a_{k,k}$, sur la diagonale de A, sont tous différents de 0.
On note $\mathcal{P}_K$ l'hypothèse de récurrence suivante :
$\mathcal{P}_K$: *Pour tout* $1 \leq k \leq K$, $a_{k,k} \neq 0$. *De plus, pour tout* $1 \leq l < K$, $b_{K,l} = 0$.
a) En calculant le coefficient en haut à gauche de $A^{-1}A$, montrer que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
b) On suppose que $\mathcal{P}_K$ est vraie, pour $K < N$. On va montrer $\mathcal{P}_{K+1}$. Montrer que les équations suivantes sont vraies :

$$
\begin{gathered}
b_{K+1,1}\, a_{1,1} = 0 \\
b_{K+1,1}\, a_{1,2} + b_{K+1,2}\, a_{2,2} = 0 \\
b_{K+1,1}\, a_{1,3} + b_{K+1,2}\, a_{2,3} + b_{K+1,3}\, a_{3,3} = 0 \\
\dots \\
b_{K+1,1}\, a_{1,K+1} + b_{K+1,2}\, a_{2,K+1} + \dots + b_{K+1,K+1}\, a_{K+1,K+1} = 1
\end{gathered}
$$

c) En déduire que $b_{K+1,1} = b_{K+1,2} = \dots = b_{K+1,K} = 0$ et que $b_{K+1,K+1} \neq 0$, puis que $\mathcal{P}_{K+1}$ est vraie.
d) Conclure.

Exercice 7 :

Soit A une matrice carrée. On note $(a_{k,l})$ les coefficients de A. On appelle *trace de* A et on note $\mathrm{Tr}(A)$ le réel suivant :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

1. Montrer que, pour toutes matrices carrées de même taille, A et B, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. Montrer que, pour toutes matrices carrées de même taille A, B, C, $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$. [Remarque : attention, l'égalité $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$, au contraire, est fausse.]
3. Montrer que si A et B sont semblables, elles ont la même trace.

Exercice 8 :

Pour tous entiers positifs k et n avec $k \leq n$, on note :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ si $n > 0$ et que $0! = 1$.)
Remarque : la notation C_n^k est française. On peut aussi utiliser la notation anglo-saxonne $\binom{n}{k}$.
1. Montrer que $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.
2. Soient A et B deux matrices carrées de même taille. On suppose qu'elles commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$. Montrer que, pour tous entiers k_1 et k_2, $BA^{k_1}B^{k_2} = A^{k_1}B^{k_2+1}$.

3. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n positif, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$. (Par convention, $A^0 = B^0 = \mathrm{Id}$.)
[Indication : si on suppose la propriété vraie au rang n, utiliser le fait que $(A+B)^{n+1} = (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A+B) A^k B^{n-k}$.]