TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \text{Prob(Le jour n+1 il pleut et le jour n il pleuvait)} \\ &\quad + \text{Prob(Le jour n+1 il pleut mais le jour n il ne pleuvait pas)} \\ &= \text{Prob(Le jour n+1 il pleut} \mid \text{Le jour n il pleuvait).Prob(Le jour n il pleuvait)} \\ &\quad + \text{Prob(Le jour n+1 il pleut} \mid \text{Le jour n il ne pleuvait pas).Prob(Le jour n il ne pleuvait pas)} \\ &= 0,6\text{Prob(Le jour n il pleuvait)} + 0,2\text{Prob(Le jour n il ne pleuvait pas)} \\ &= 0,6p_n + 0,2q_n \end{aligned}$$

De même pour q_{n+1}.

2. Par définition du produit des matrices A et $\left(\begin{smallmatrix} p_n \\ q_n \end{smallmatrix}\right)$:

$$A \times \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6p_n + 0,2q_n \\ 0,4p_n + 0,8q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix}$$

3. $MN = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Id}$ et $NM = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Id}$.

4. $M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N = M \times \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 4/15 & -2/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} = A.$

5.
$$\begin{aligned}
A^2 &= M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N \times M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N \\
&= M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N \\
&= M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,16 \end{pmatrix} \times N \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0,16 \\ 2 & -0,16 \end{pmatrix} \times N = \begin{pmatrix} 0,44 & 0,28 \\ 0,56 & 0,72 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6. On utilise le fait que tous les $N \times M$ se simplifient : ils valent Id, donc n'interviennent pas dans le produit (voir propriété du cours sur la puissance des matrices semblables : A est semblable à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{smallmatrix}\right)$ puisque $N = M^{-1}$).
On utilise également le fait que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{smallmatrix}\right)$ (propriété des matrices diagonales).

$$\begin{aligned}
A^n &= M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N \times M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N ... \times M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N \\
&= M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix} \times N \\
&= M \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,4^n \end{pmatrix} \times N \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0,4^n \\ 2 & -0,4^n \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} (1+2.0,4^n)/3 & (1-0,4^n)/3 \\ (2-2.0,4^n)/3 & (2+0,4^n)/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= A \times \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = A \times A \times \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= A \times A \times ... \times \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \\
&= A^n \times \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2.0,4^n)/3 & (1-0,4^n)/3 \\ (2-2.0,4^n)/3 & (2+0,4^n)/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1+2.0,4^n)/3 \\ (2-2.0,4^n)/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $p_n = (1+2.0,4^n)/3$ et $q_n = (2-2.0,4^n)/3$. Puisque $0,4^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$:

$$p_n \to 1/3 \quad q_n \to 2/3$$

Exercice 3 :

1. On a $a=1, b=0, c=0, d=1$ donc $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. C'est la matrice identité.
2. $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_0+by_0 \\ cx_0+dy_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
3. a)

$$\begin{aligned} f\circ g(x,y) &= f(a'x+b'y, c'x+d'y) \\ &= (a(a'x+b'y)+b(c'x+d'y), c(a'x+b'y)+d(c'x+d'y)) \\ &= ((aa'+bc')x+(ab'+bd')y, (ca'+dc')x+(cb'+dd')y) \end{aligned}$$

b) Notons $M_{f\circ g}$ la matrice associée à $f\circ g$. On a :

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M_g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$
$$M_{f\circ g} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} = M_f M_g$$

4. Soient A, B, C trois matrices. Notons f_A, f_B, f_C des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ ayant ces matrices pour matrices associées.
D'après la question 3, AB est la matrice associée à $f_A\circ f_B$. $(AB)C$ est le produit de la matrice associée à $f_A\circ f_B$ et de la matrice associée à f_C. D'après la question 3, c'est la matrice associée à $(f_A\circ f_B)\circ f_C$.
De la même façon, $A(BC)$ est la matrice associée à $f_A\circ(f_B\circ f_C)$.
Puisque $f_A\circ(f_B\circ f_C) = (f_A\circ f_B)\circ f_C$ (car la composition des fonctions est associatives), les matrices $A(BC)$ et $(AB)C$ sont les matrices associées de la même application linéaire. Elles sont donc égales (puisque une application linéaire définit de manière unique sa matrice associée). Donc $A(BC) = (AB)C$, pour toutes matrices A, B, C, ce qui est la définition de l'associativité.

Exercice 4 :
1. a) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = \mathrm{Id}$
$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{Id}$
Donc AB est inversible et son inverse vaut $B^{-1}A^{-1}$.
b) $(C^{-1}B^{-1}A^{-1})(ABC) = C^{-1}B^{-1}(A^{-1}A)BC = C^{-1}B^{-1}BC = C^{-1}C = \mathrm{Id}$
$(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{Id}$
Donc ABC est inversible et son inverse vaut $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.
c) $A^n(A^{-1})^n = AA...AA^{-1}...A^{-1}A^{-1}$. Il y a n A et n A^{-1}. Ils se simplifient par paire et on obtient l'identité.
De même, $(A^{-1})^nA^n = \mathrm{Id}$. Donc A^n est inversible, d'inverse $(A^{-1})^n$.
a) $((AB)^{-1}A)B = (AB)^{-1}(AB) = \mathrm{Id}$
b) $A^{-1}AB((AB)^{-1}A) = A^{-1}((AB)(AB)^{-1})A = A^{-1}A = \mathrm{Id}$
$B((AB)^{-1}A) = \mathrm{Id}B((AB)^{-1}A) = A^{-1}AB((AB)^{-1}A) = \mathrm{Id}$
c) D'après les questions a) et b), $B((AB)^{-1}A) = ((AB)^{-1}A)B = (AB)^{-1}(AB) = \mathrm{Id}$. Cela implique que B est inversible, d'inverse $((AB)^{-1}A)$. C'est absurde car on avait supposé que B n'était pas inversible.

Exercice 5 :

1. On cherche d'abord à résoudre l'équation $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Si cette équation a une solution, alors l'inverse de $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ sera la solution trouvée. Si l'équation n'a pas de solution, cela signifiera que $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible (car sa matrice inverse, si elle existait, devrait vérifier l'équation).

Puisque $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4w+y & 4x+z \\ 11w+3y & 11x+3z \end{smallmatrix}\right)$, cette équation devient :

$$\begin{aligned} 4w + y = 1 \quad & 11w + 3y = 0 \\ 4x + z = 0 \quad & 11x + 3z = 1 \end{aligned}$$

On a donc $z = -4x$, $1 = 11x + 3z = 11x - 12x = -x$ donc $x = -1$ et $z = 4$.

De plus, $y = 1 - 4w$, $0 = 11w + 3y = 11w + 3 - 12w = 3 - w$ donc $w = 3$ et $y = -11$.

On trouve donc que l'inverse, s'il existe, est égal à $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Pour montrer que c'est bien l'inverse, il faut aussi vérifier que $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Id}$. Le calcul du produit montre que c'est bien le cas.

On procède de même pour la deuxième matrice : on cherche à résoudre l'équation $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Id} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Cette équation devient :

$$\begin{aligned} -2w + 2y = 1 \quad & w - y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \quad & x - z = 0 \end{aligned}$$

On trouve donc $w = y$ et $1 = -2w + 2y = 0$. C'est absurde donc l'équation n'a pas de solution. Cela signifie que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible (sinon l'inverse serait solution de l'équation).

On cherche à résoudre l'équation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Id}$.

Cette équation devient :

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 = 1 \quad & x_2 + x_3 = 0 \quad & -2x_1 + x_2 = 0 \\ y_1 + y_3 = 0 \quad & y_2 + y_3 = 1 \quad & -2y_1 + y_2 = 0 \\ z_1 + z_3 = 0 \quad & z_2 + z_3 = 0 \quad & -2z_1 + z_2 = 1 \end{aligned}$$

On résoud. On trouve que l'équation a une solution et que la solution est :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la matrice de l'énoncé a un inverse, c'est donc $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On vérifie que cette matrice est bien l'inverse en calculant :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$$

2. Il faut que l'équation $\left(\begin{smallmatrix} -3 & \alpha \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ait une solution. Cette équation peut se récrire sous la forme :

$$\begin{aligned} -3w + \alpha y = 1 \quad & w + y = 0 \\ -3x + \alpha z = 0 \quad & x + z = 1 \end{aligned}$$

On doit donc avoir $w = -y$ et $(3+\alpha)y = 1$. Il faut donc que $\alpha \neq -3$, pour que $3 + \alpha \neq 0$. Si cette condition est vérifiée, on a $y = 1/(3+\alpha)$ et $w = -1/(3+\alpha)$.
On doit aussi avoir $x = 1 - z$ et $-3 + (3+\alpha)z = 0$ donc $(3+\alpha)z = 3$. Si $\alpha \neq -3$, on trouve donc $z = 3/(3+\alpha)$ et $x = 1 - z = \alpha/(3+\alpha)$.
Si $\alpha = -3$, l'équation n'a pas de solution donc la matrice M_α n'est pas inversible. Si $\alpha \neq -3$, l'inverse, s'il existe, doit être $\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1/(3+\alpha) & \alpha/(3+\alpha) \\ 1/(3+\alpha) & 3/(3+\alpha) \end{smallmatrix}\right)$. Pour montrer que, lorsque $\alpha \neq -3$, la matrice M_α est bien inversible et a pour inverse la matrice indiquée, il suffit de vérifier que $\left(\begin{smallmatrix} -1/(3+\alpha) & \alpha/(3+\alpha) \\ 1/(3+\alpha) & 3/(3+\alpha) \end{smallmatrix}\right) M_\alpha = \mathrm{Id}$.
Or :

$$\begin{pmatrix} -1/(3+\alpha) & \alpha/(3+\alpha) \\ 1/(3+\alpha) & 3/(3+\alpha) \end{pmatrix} M_\alpha = \begin{pmatrix} (3+\alpha)/(3+\alpha) & (-\alpha+\alpha)/(3+\alpha) \\ (-3+3)/(3+\alpha) & (\alpha+3)/(3+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$$

Donc M_α est inversible si et seulement si $\alpha \neq -3$ et, dans ce cas, l'inverse vaut $\left(\begin{smallmatrix} -1/(3+\alpha) & \alpha/(3+\alpha) \\ 1/(3+\alpha) & 3/(3+\alpha) \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 6 :
1. On procède comme à l'exercice précédent. Il faut résoudre l'équation $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} w & x \\ y & z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Elle est équivalente à :

$$wa + by = 1 \quad yc = 0xa + bz = 0 \quad zc = 1$$

On doit donc avoir $c \neq 0$ et $z = 1/c$. Si $c \neq 0$, on a nécessairement $y = 0$, puisque $yc = 0$. On a alors $wa = 1$ donc $a \neq 0$ et $w = 1/a$. Enfin, $0 = xa + bz = xa + b/c$ donc $x = -b/(ac)$.
Pour que la matrice M soit inversible, il faut donc que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Dans ce cas, si l'inverse existe, c'est $\left(\begin{smallmatrix} 1/a & -b/(ac) \\ 0 & 1/c \end{smallmatrix}\right)$. On vérifie que, lorsque $a, c \neq 0$, M est bien inversible, avec l'inverse indiqué :

$$\left(\begin{smallmatrix} 1/a & -b/(ac) \\ 0 & 1/c \end{smallmatrix}\right) M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Donc M est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et, dans ce cas, l'inverse est $\left(\begin{smallmatrix} 1/a & -b/(ac) \\ 0 & 1/c \end{smallmatrix}\right)$.

2. a) Le coefficient en haut à gauche de $A^{-1}A$ est $(A^{-1}A)_{1,1} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{1,k}a_{k,1}$. Or $a_{k,1} = 0$ pour tout $k > 1$, donc $(A^{-1}A)_{1,1} = b_{1,1}a_{1,1}$.
De plus, puisque $A^{-1}A = \mathrm{Id}$, $(A^{-1}A)_{1,1} = 1$. En particulier, $a_{1,1} \neq 0$.
Donc, pour tout $1 \leq k \leq 1$, $a_{k,k} \neq 0$. Il n'y a aucun entier l tel que $1 \leq l < k$ donc la deuxième partie de l'hypothèse de récurrence est aussi vraie.
b) Puisque $A^{-1}A = \mathrm{Id}$, on doit avoir :

$$(A^{-1}A)_{K+1,1} = 0 \quad (A^{-1}A)_{K+1,2} = 0 \quad ...(A^{-1}A)_{K+1,K} = 0 \quad (A^{-1}A)_{K+1,K+1} = 1$$

Pour tout $l \leq K+1$, $(A^{-1}A)_{K+1,l} = \sum_k^n b_{K+1,k}a_{k,l}$. Puisque $a_{k,l} = 0$ si $k > l$, on peut arrêter la somme à l au lieu de n et on trouve :

$$\begin{gathered}
0 = (A^{-1}A)_{K+1,1} = b_{K+1,1}a_{1,1} \\
0 = (A^{-1}A)_{K+1,2} = b_{K+1,1}a_{1,2} + b_{K+1,2}a_{2,2} \\
\ldots \\
1 = (A^{-1}A)_{K+1,K+1} = b_{K+1,1}a_{1,K+1} + \ldots + b_{K+1,K+1}a_{K+1,K+1}
\end{gathered}$$

c) D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_K$, $a_{1,1} \neq 0, a_{2,2} \neq 0, \ldots, a_{K,K} \neq 0$.
En considérant la première équation, puisque $a_{1,1} \neq 0$, on trouve que $b_{K+1,1} = 0$. Dans la deuxième équation, le terme $b_{K+1,1}a_{1,2}$ est donc nul et on doit avoir $b_{K+1,2}a_{2,2} = 0$. Puisque $a_{2,2} \neq 0$, on doit avoir $b_{K+1,2} = 0$. Dans la troisième équation, les deux premiers termes sont nuls. De plus, $a_{3,3} \neq 0$ donc $b_{K+1,3} = 0$. On continue ainsi jusqu'à la dernière équation, qui devient $b_{K+1,K+1}a_{K+1,K+1} = 1$. On doit donc avoir $a_{K+1,K+1} \neq 0$.
On a donc démontré que $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{K+1,K+1} \neq 0$ et que $b_{K+1,1} = b_{K+1,2} = \ldots = b_{K+1,K} = 0$, c'est-à-dire qu'on a démontré $\mathcal{P}_{K+1}$.

b) D'après $\mathcal{P}_n$, $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \neq 0$ donc les coefficients diagonaux de A sont effectivement tous différents de 0.
De plus, pour tous k et l tels que $k > l$, d'après $\mathcal{P}_k$, on a $b_{k,l} = 0$. Donc A^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 7 :

1. $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{k,k} = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n A_{k,l}B_{l,k}$

$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{l=1}^n (BA)_{l,l} = \sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n B_{l,k}A_{k,l} = \mathrm{Tr}(AB)$

2. $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(A(BC)) = \mathrm{Tr}((BC)A) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(B(CA)) = \mathrm{Tr}((CA)B) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

3. Si A et B sont semblables, il existe P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Alors, d'après la question 2., $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{Tr}(BP^{-1}P) = \mathrm{Tr}(B\mathrm{Id}) = \mathrm{Tr}(B)$.

Exercice 8 :

1.
$$\begin{aligned}
C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} \\
&= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

2. À chaque fois que, dans le produit, apparaît un couple BA, on peut le remplacer par AB : $BA^{k_1}B^{k_2} = BAA...AB^{k_2} = ABA...AB^{k_2} = AAB...AB^{k_2} = ... = A^{k_1}BB^{k_2} = A^{k_1}B^{k_2+1}$.

3. Pour $n = 0$, c'est vrai : $(A+B)^n = \mathrm{Id} = \sum\limits_{k=0}^{0} C_k^k A^k B^k$ car $C_0^0 = 1$ et $A^0 = B^0 = \mathrm{Id}$.

On suppose la propriété vraie au rang n et on la démontre au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n \\
&= (A+B)\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A+B) A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (AA^k B^{n-k} + BA^k B^{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (A^{k+1} B^{n-k} + A^k B^{n+1-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} A^k B^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_n^{k-1} A^k B^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (C_n^{k-1} + C_n^k) A^k B^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k A^k B^{n+1-k}
\end{aligned}$$