TD : Algèbre

Exercice 1 :

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées.

1. Dans $\mathbb{R}^4$: $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Dans $\mathbb{R}^3$: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Dans $\mathbb{R}^4$: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Déterminer si les familles suivantes sont génératrices dans $\mathbb{R}^3$.

1. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

2. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Parmi les applications suivantes, indiquer, en justifiant la réponse, lesquelles sont linéaires.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3) \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to & x_1 - x_2 - 1 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \to & g(2) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \to & AB \end{array}$$

(Dans la définition de f_4, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé, quelconque, et B est une matrice fixée, quelconque, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.)

Exercice 4 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f((1,0,0)) = (1,0,0)$, $f((0,1,0)) = (0,1,0)$ et $f((0,0,1)) = (0,1,0)$.
a) Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Que vaut $f((x, y, z))$?
b) Déterminer le noyau de f.

c) Déterminer l'image de f.

2. Soit $n \geq 2$. On définit une application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ de la manière suivante : si M est une matrice carrée de taille n, $f(M)$ est la matrice de taille $n-1$ formée par le carré de taille $n-1$ en haut à gauche de M.

Si on note :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix}$$

on a alors :

$$f(M) = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,1} & \dots & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau de f.

c) Déterminer l'image de f.

Exercice 5 :

Soient E, F, G deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires.

1. On note g' la restriction de g à $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} g' : & \operatorname{Im} f & \to & G \\ & x & \to & g(x) \end{array}$$

a) Montrer que $\operatorname{Im} g' = \operatorname{Im}(g \circ f)$.

b) En déduire que $g \circ f$ est surjective si et seulement si g' l'est.

2. a) Montrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \{x \in E \text{ tq } f(x) \in \operatorname{Ker} g'\}$.

b) Montrer que, si g' et f sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.

c) Montrer que si f n'est pas injective ou g' n'est pas injective, alors $g \circ f$ n'est pas non plus injective.

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, tels que $E = F \oplus G$. On note $p : E \to E$ la projection sur F parallèlement à G.

Montrer que, pour tout $x \in E$, $(p \circ p)(x) = p(x)$.

2. Soit $p : E \to E$ une application linéaire telle que, pour tout $x \in E$, $(p \circ p)(x) = p(x)$. On note $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

a) Montrer que si $x \in F$, alors $x = p(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in E$, $x - p(x) \in G$. En déduire que $G + F = E$. [Indication : utiliser le fait que, pour tout x, $x = p(x) + (x - p(x))$.]

c) Montrer que $G \oplus F = E$.

d) Montrer que p est la projection sur F parallèlement à G.

3. [Difficile] Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, on appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s suivante : pour tout $x \in E$, si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, alors $s(x) = y - z$.
a) Montrer que, si s est une symétrie, $s \circ s = \mathrm{Id}$.
b) Montrer que si $s : E \to E$ est une application linéaire telle que $s \circ s = \mathrm{Id}$, alors il existe F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. [Indication : poser $F = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id})$.]

Exercice 7 :

1. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
On définit les applications f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & (0, u_0, u_1, u_2, ...) \end{array}$$

a) Montrer que f et g sont des applications linéaires.

b) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

c) Existe-t-il $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $h \circ f = \mathrm{Id}$?

2. [Plus difficile] Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Soit $f : E \to F$ linéaire. On suppose que $\mathrm{Im}\, f$ admet un supplémentaire dans F. Montrer que f est injective si et seulement si il existe $h : F \to E$ linéaire telle que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.