TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

1. La famille est liée s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$. On veut donc déterminer quels sont les réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 3\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Résolvons donc ce système. Sa matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1/2$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1/2$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_4$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3/2$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Toutes les variables sont essentielles : chacune des trois premières colonnes de la matrice échelonnée réduite obtenue contient un pivot. Il y a donc une unique solution.

Puisque $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, c'est l'unique solution. La famille n'est donc pas liée : elle est libre.

2. On veut savoir s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ non tous les trois nuls tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1&-1&6&0\\ 1&-1&4&0\\ -4&1&2&0 \end{pmatrix}$. Trouvons par l'algorithme de Gauss sa matrice échelonnée réduite associée.

$L_2 \leftarrow L_1 + L_2$, $\begin{pmatrix} -1&-1&6&0\\ 0&-2&10&0\\ -4&1&2&0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, $\begin{pmatrix} -1&-1&6&0\\ 0&-2&10&0\\ 0&5&-22&0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 5/2L_1$, $\begin{pmatrix} -1&-1&6&0\\ 0&-2&10&0\\ 0&0&3&0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow -L_1$, $\begin{pmatrix} 1&1&-6&0\\ 0&-2&10&0\\ 0&0&3&0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow -L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1&1&-6&0\\ 0&1&-5&0\\ 0&0&3&0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3/3$, $\begin{pmatrix} 1&1&-6&0\\ 0&1&-5&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3$, $\begin{pmatrix} 1&1&-6&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 6L_3$, $\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$

Toutes les variables sont essentielles. La solution est donc unique, c'est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$. La famille est donc libre.

On veut savoir s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ non tous les quatre nuls tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + 5\lambda_4 &= 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1&3&-1&1&0\\ -2&-5&2&0&0\\ 0&1&1&4&0\\ 1&3&1&5&0 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1&3&-1&1&0\\ 0&1&0&2&0\\ 0&1&1&4&0\\ 1&3&1&5&0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1&3&-1&1&0\\ 0&1&0&2&0\\ 0&1&1&4&0\\ 0&0&2&4&0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
La variable λ_4 est libre. Il y a donc une infinité de solutions. En particulier, il y a d'autres solutions que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0, 0, 0, 0)$. La famille est donc liée.

Exercice 2 :
1. La famille est génératrice si et seulement si, pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
On cherche donc à déterminer si le système suivant a une solution pour tous a, b, c :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & = a \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = b \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3 & = c \end{cases}$$

La matrice augmentée associée à ce système est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 & b \\ 2 & -4 & -6 & c \end{pmatrix}$. Réduisons-la par l'algorithme de Gauss.
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 4 & b-3a \\ 2 & -4 & -6 & c \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 4 & b-3a \\ 0 & -2 & -4 & c-2a \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 4 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c+b-5a \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & (b-3a)/2 \\ 0 & 0 & 0 & c+b-5a \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b/2-a/2 \\ 0 & 1 & 2 & (b-3a)/2 \\ 0 & 0 & 0 & c+b-5a \end{pmatrix}$
La dernière ligne de ce système est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c+b-5a \end{pmatrix}$. Si $c + b - 5a \neq 0$, le système n'a donc pas de solution. Or il est possible que $c + b - 5a \neq 0$: pour certains $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, le système n'a pas de solution. La famille n'est donc pas génératrice.
2. Il faut déterminer si, pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, le système suivant a une solution :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = a \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = b \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = c \end{cases}$$

La matrice augmentée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ -1 & 4 & 2 & b \\ -1 & 3 & 2 & c \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 7 & 2 & b+a \\ -1 & 3 & 2 & c \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 7 & 2 & b+a \\ 0 & 6 & 2 & c+a \end{smallmatrix}\right)$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 6 & 2 & c+a \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 2 & 7c+a-6b \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3/2$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & 7c/2+a/2-3b \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & a-3b+3c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & 7c/2+a/2-3b \end{smallmatrix}\right)$
Cette matrice n'a jamais de ligne de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$. Il y a donc toujours une solution : la famille est génératrice.

Exercice 3 :

1. f_1 est linéaire. Pour le démontrer, il suffit de montrer qu'elle respecte les combinaisons linéaires, c'est-à-dire que si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ, λ' sont des réels quelconques, alors $f_1(\lambda x + \lambda' x') = \lambda f_1(x) + \lambda' f_1(x')$.
En effet :

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x + \lambda' x') &= f_1((\lambda x_1 + \lambda' x'_1, \lambda x_2 + \lambda' x'_2, \lambda x_3 + \lambda' x'_3)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda' x'_1 + \lambda x_2 + \lambda' x'_2, 2(\lambda x_2 + \lambda' x'_2) - \lambda x_3 - \lambda' x'_3) \\ &= (\lambda(x_1 + x_2) + \lambda'(x'_1 + x'_2), \lambda(2x_2 - x_3) + \lambda'(2x'_2 - x'_3)) \\ &= \lambda(x_1 + x_2, 2x_2 - x_3) + \lambda'(x'_1 + x'_2, 2x'_2 - x'_3) \\ &= \lambda f_1(x) + \lambda' f_1(x') \end{aligned}$$

2. f_2 n'est pas linéaire. En effet, si f_2 était linéaire, on aurait, par exemple, $-1 = f_2((0,0)) = f_2((0,0) + (0,0)) = f_2((0,0)) + f_2((0,0)) = -2$.
3. f_3 est linéaire. En effet, $f_3(\lambda g + \lambda' g') = (\lambda g + \lambda' g')(2) = \lambda g(2) + \lambda' g'(2) = \lambda f_3(g) + \lambda' f_3(g')$.
4. f_4 est linéaire. En effet, $f_4(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B = \lambda f_4(A) + \lambda' f_4(A')$.

Exercice 4 :

1. a) Puisque $(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ et f est linéaire :

$$\begin{aligned} f((x,y,z)) &= f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) \\ &= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,1,0) \\ &= (x, y+z, 0) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f\\
&\Leftrightarrow f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow (x, y+z, 0) = (0,0,0)\\
&\Leftrightarrow x = 0, y+z = 0, 0 = 0\\
&\Leftrightarrow x = 0, y = -z
\end{aligned}$$

Le noyau de f est donc constitué des éléments de la forme $(0, z, -z)$: $\operatorname{Ker} f = \{(0, z, -z) \text{ tq } z \in \mathbb{R}\}$.

c) L'image de f est l'ensemble des $f((x,y,z))$, pour tous les $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Il s'agit donc de tous les éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $(x, y+z, 0)$. Il s'agit exactement de l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ dont la dernière coordonnée est nulle :

$$\operatorname{Im} f = \{(a, b, 0) \text{ tq } a, b \in \mathbb{R}\}$$

En effet, tout $f((x,y,z)) = (x, y+z, 0)$ est bien de la forme $(a, b, 0)$, pour $a = x$, $b = y+z$. Réciproquement, quels que soient a, b des réels, $(a, b, 0) = f((a, b, 0))$ donc $(a, b, 0) \in \operatorname{Im} f$.

2. a) Soient λ, λ' des réels et M, M' des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & \dots & M'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{n1} & \dots & M'_{nn} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\lambda M + \lambda' M' = \begin{pmatrix} \lambda M_{11} + \lambda' M'_{11} & \dots & \lambda M_{1n} + \lambda' M'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda M_{n1} + \lambda' M'_{n1} & \dots & \lambda M_{nn} + \lambda' M'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda M + \lambda' M') &= \begin{pmatrix} \lambda M_{11} + \lambda' M'_{11} & \dots & \lambda M_{1,n-1} + \lambda' M'_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda M_{n-1,1} + \lambda' M'_{n-1,1} & \dots & \lambda M_{n-1,n-1} + \lambda' M'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}\\
&= \lambda \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,1} & \dots & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} M'_{11} & \dots & M'_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{n-1,1} & \dots & M'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}\\
&= \lambda f(M) + \lambda' f(M')
\end{aligned}$$

b) M est dans le noyau de f si et seulement si $f(M) = 0$, c'est-à-dire si :

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n-1,1} & \dots & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Cela revient à dire que la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & M_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \\ M_{n1} & \dots & & M_{nn} \end{pmatrix}$.

c) $\operatorname{Im} f = \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$
En effet, on sait que $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, puisque $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble d'arrivée de la fonction f.
Il reste donc à montrer que $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) \subset \operatorname{Im} f$. Soit donc $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ quelconque. Montrons que, nécessairement, $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. On note $(S_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1}$ les coefficients de S. Posons :

$$M = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{n-1,1} & \dots & S_{n-1,n-1} & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $f(M) = S$. Donc $S \in \operatorname{Im} f$.

Exercice 5 :

1. a) $\operatorname{Im} g' \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$: si $y \in \operatorname{Im} g'$, il existe $x \in \operatorname{Im} f$ tel que $y = g'(x) = g(x)$. Puisque $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. Alors $y = g(x) = g(f(z)) = (g \circ f)(z)$. Donc $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.
$\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g'$: si $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Puisque $f(x) \in \operatorname{Im} f$, $g(f(x)) = g'(f(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} g'$.
b) $g \circ f$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(g \circ f) = G$. Puisque $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g'$, c'est équivalent au fait que $\operatorname{Im} g' = G$ et donc au fait que g' soit surjective.

2. a) $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \{x \text{ tq } g(f(x)) = 0\} = \{x \text{ tq } g'(f(x)) = 0\} = \{x \text{ tq } f(x) \in \operatorname{Ker} g'\}$
b) Si g' et f sont injectives, alors $\operatorname{Ker} g' = \{0_F\}$ et $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Donc, d'après la question a), $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \{x \text{ tq } f(x) \in \{0_F\}\} = \{x \text{ tq } f(x) = 0_F\} = \operatorname{Ker} f = \{O_E\}$. Donc $g \circ f$ est injective.
c) Si f n'est pas injective, $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$ donc il existe $y \in E$ tel que $y \neq 0$ et $f(y) = 0$. Pour ce y, on a aussi $(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(0_F) = 0$. Donc $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \{0_E\}$ (puisque y appartient à ce noyau et est non-nul) et $(g \circ f)$ n'est pas injective.
Si g' n'est pas injective, il existe $\operatorname{Ker} g' \neq \{0_F\}$. Soit donc $y \in \operatorname{Ker} g'$ tel que $y \neq 0$. C'est un élément de $\operatorname{Im} f$ (puisque $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble de départ de g') ; il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $g(f(x)) = g'(f(x)) = g'(y) = 0$ (puisque $y \in \operatorname{Ker} g'$). De plus, $x \neq 0$ car $f(x) = y \neq 0$. Donc $\operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \{0_E\}$ et $g \circ f$ n'est pas injective.

Exercice 6 :

1. Pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$, par définition de la projection. Donc $p(x) = p(x) + 0$ avec $p(x) \in F$ et $0 \in G$. Par définition de la projection, $p(p(x)) = p(x)$.

2. a) Si $x \in F = \operatorname{Im} p$, $x = p(y)$ pour un certain $y \in E$. Puisque $p \circ p = p$, $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$.
b) Pour tout $x \in E$, $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$ donc $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = G$.
Pour tout $x \in E$, $x = p(x) + (x - p(x))$. Or $p(x) \in F$ et $(x - p(x)) \in G$. Donc $x \in F + G$. Puisque tous les éléments de E appartiennent à $F + G$, $E \subset F + G$. Comme, de plus, $F + G \subset E$, $E = F + G$.
c) Puisqu'on a déjà montré que $G + F = E$, il faut montrer que $G \cap F = \{0\}$.
Soit $x \in G \cap F$ quelconque. Puisque $x \in F$, $x = p(x)$ (d'après le a)). Puisque $x \in G$, $p(x) = 0$. Donc $x = p(x) = 0$. Cela veut dire que $G \cap F$ ne contient que 0, ce qui est ce qu'on voulait

démontrer. Donc $G \oplus F = E$.
d) Soit $x \in E$ quelconque. Puisque $G \oplus F = E$, x est de la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. $p(x) = p(y) + p(z)$ car p est linéaire. Puisque $z \in G = \operatorname{Ker} p$, $p(z) = 0$. Puisque $y \in F$, d'après le a), $p(y) = y$ donc $p(x) = y$. C'est bien la définition de la projection sur p parallèlement à G.

3. a) Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, $s(x) = y + (-z)$ avec $y \in F$ et $(-z) \in G$ donc $s(s(x)) = y - (-z) = y + z = x$.
b) Posons $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$.
$F \cap G = \{0\}$: si $x \in F \cap G$, $(s - \mathrm{Id})(x) = 0$ donc $s(x) = x$ et $(s + \mathrm{Id})(x) = 0$ donc $s(x) = -x$. Donc $x = -x$ et $x = 0$.
$F + G = E$: pour tout $x \in E$, $x = (x + s(x))/2 + (x - s(x))/2$. De plus, $(s - \mathrm{Id})(x + s(x)) = s(x + s(x)) - (x + s(x)) = s(x) + s(s(x)) - x - s(x) = 0$ donc $(x + s(x))/2 \in F$. De même, $(x - s(x))/2 \in G$. Donc $x \in F + G$.
Donc $F \oplus G = E$: F et G sont supplémentaires.
De plus, si $y \in F$, $s(y) - y = 0$ donc $s(y) = y$ et, si $z \in G$, $s(z) + z = 0$ donc $s(z) = -z$. Donc, si $x = y + z$ avec $y \in F, z \in G$, $s(x) = s(y) + s(z) = y - z$.

Exercice 7 :

1. a) $f(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) = (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \lambda f((u_n)) + \mu f((v_n))$
$g(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) = (0, \lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1, ...) = \lambda(0, u_0, u_1, ...) + \mu(0, v_0, v_1, ...) = \lambda g((u_n)) + \mu g((v_n))$
b) $f \circ g((u_n)) = f((0, u_0, u_1, ...)) = (u_0, u_1, ...)$ donc $f \circ g = \mathrm{Id}$.
$g \circ f((u_n)) = g((u_1, u_2, ...)) = (0, u_1, u_2, ...)$ donc $g \circ f \neq \mathrm{Id}$.
c) f n'est pas injective : $f((1, 0, 0, ...)) = (0, 0, 0, ...) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$. Donc $h \circ f$ ne peut pas être injective (on aura par exemple toujours $h \circ f((1, 0, 0, ...)) = h \circ f(0, 0, ...))$; puisque Id est injective, $h \circ f$ ne peut pas être égale à Id.

2. Si f n'est pas injective, h n'existe pas car $h \circ f$ n'est pas injective ($\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(h \circ f)$ donc $\operatorname{Ker}(h \circ f) \neq \{0_E\}$) et ne peut donc pas être égale à Id qui, elle, est injective.
Supposons maintenant que f est injective et montrons que h existe. Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F. Pour tout $x \in E$, x est de la forme $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Im} f$ et $z \in G$. Puisque y appartient à $\operatorname{Im} f$, il existe $\alpha \in E$ tel que $y = f(\alpha)$; ce α est unique car f est injective. On pose $h(x) = \alpha$.
On peut vérifier que h est linéaire (c'est la même démonstration que pour montrer que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire). De plus, pour tout $\beta \in E$, $f(\beta) \in \operatorname{Im} f$; le α tel que $f(\beta) = f(\alpha)$ vaut β donc $h(f(\beta)) = \beta$.