Université Pierre et Marie Curie — Le 11 avril 2013
LM125 — http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Exercice 1 : [Examen 2012]

Soit A une matrice carrée d'ordre 5 dont les colonnes sont notées A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Soit C la matrice carrée d'ordre 5 dont les colonnes notées C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sont données par :

$$\begin{aligned}
C_1 &= A_1\\
C_2 &= A_1 + 2A_2\\
C_3 &= A_1 + A_2 + 3A_3\\
C_4 &= A_1 + A_2 + A_3 + 4A_4\\
C_5 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 5A_5
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du déterminant, calculer $\det(C)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Soient $\mathcal{B}$ une base quelconque de E et M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Montrer que si $\det(M - \lambda I_n) = 0$, alors $f - \lambda I_E$ est une application non-inversible.

b) Montrer que si $\det(M - \lambda I_n) = 0$, alors il existe $v \in E$ tel que $v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v$.

c) On suppose maintenant qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels différents tels que $\det(M - \lambda_k I_n) = 0$ pour tout k. Soient $v_1, ..., v_n \in E$ comme en b) (c'est-à-dire tels que, pour tout k, $v_k \neq 0$ et $f(v_k) = \lambda_k v_k$). On va montrer par récurrence que, pour tout $k \leq n$, $(v_1, ..., v_k)$ est une famille libre. Pourquoi est-ce vrai pour $k = 1$?

d) On suppose que $(v_1, ..., v_k)$ est libre et on montre que $(v_1, ..., v_{k+1})$ est libre. Supposons qu'il existe $a_1, ..., a_{k+1} \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 v_1 + ... + a_{k+1} v_{k+1} = 0$. Montrer que $\lambda_1 a_1 v_1 + ... + \lambda_{k+1} a_{k+1} v_{k+1} = 0$.

e) Montrer que $(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) a_1 v_1 + ... + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) a_k v_k = 0$ et, en utilisant l'hypothèse de récurrence, montrer que $a_1 = ... = a_k = 0$.

f) Montrer que $a_{k+1} = 0$ et conclure.

g) Montrer que $\mathcal{P} = (v_1, ..., v_n)$ est une base de E.

h) Montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

2. a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $f((x, y, z)) = (-x + y - z, -4x + 4y - 2z, -2x + 2y)$. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $\det(M - \lambda I_3)$ en fonction de λ. Trouver pour quels λ ce déterminant est nul.

c) On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs trouvées en b). Pour chaque k, trouver $v_k \in \mathbb{R}^3$ tel que $v_k \neq 0$ et $f(v_k) = \lambda_k v_k$.
d) On note $\mathcal{P} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f)$.

Exercice 3 : [Matrices de Vandermonde]
Soit $n \geq 2$. Soient $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$. On note $M(x_1, ..., x_n)$ la matrice suivante :

$$M(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & x_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On va démontrer par récurrence sur n que $\det(M(x_1, ..., x_n)) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i)$.

1. Démontrer le résultat pour $n = 2$.

2. On suppose que le résultat est vrai pour $n \geq 2$ et on le démontre pour $n+1$. Soient $x_1, ..., x_{n+1}$ des réels quelconques.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout k compris entre 0 et n :

$$\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-k-1} & ... & x_n^{n-k-1} & x_{n+1}^{n-k-1} \\ x_1^{n-k} & ... & x_n^{n-k} & x_{n+1}^{n-k} \\ x_1^{n-k}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-k}(x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0 \end{pmatrix}$$

b) En utilisant le résultat de la question précédente pour $k = n$, montrer que :

$$\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = (-1)^{n+2} \det \begin{pmatrix} (x_1 - x_{n+1}) & (x_2 - x_{n+1}) & ... & (x_n - x_{n+1}) \\ x_1(x_1 - x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & ... & x_n(x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

c) En déduire que $\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1})...(x_n - x_{n+1}) \det M(x_1, ..., x_n)$.
d) Conclure.