Université Pierre et Marie Curie
LM125

Le 11 avril 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

$C = (A_1|A_1 + 2A_2|A_1 + A_2 + 3A_3|A_1 + A_2 + A_3 + 4A_4|A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + 5A_5)$

On soustrait la première colonne aux quatre suivantes. Cela ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det C = \det(A_1|2A_2|A_2 + 3A_3|A_2 + A_3 + 4A_4|A_2 + A_3 + A_4 + 5A_5)$$

On soustrait $2A_2/2 = A_2$ aux colonnes $3, 4, 5$. Cela ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det C = \det(A_1|2A_2|3A_3|A_3 + 4A_4|A_3 + A_4 + 5A_5)$$

On soustrait $3A_3/3 = A_3$ aux colonnes $4, 5$. Cela ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det C = \det(A_1|2A_2|3A_3|4A_4|A_4 + 5A_5)$$

On soustrait $4A_4/4 = A_4$ à la colonne 5. Cela ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det C = \det(A_1|2A_2|3A_3|4A_4|5A_5)$$

Par multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes $2, 3, 4$ puis 5 :

$$\begin{aligned}\det C &= 2\det(A_1|A_2|3A_3|4A_4|5A_5)\\ &= 2.3\det(A_1|A_2|A_3|4A_4|5A_5)\\ &= 2.3.4\det(A_1|A_2|A_3|A_4|5A_5)\\ &= 2.3.4.5\det(A_1|A_2|A_3|A_4|A_5)\\ &= 120\det A\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. a) Dans ce cas, $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Or $M - \lambda I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f - \lambda I_E)$. La matrice de l'application $f - \lambda I_E$ n'est donc pas inversible ; cela signifie que $f - \lambda I_E$ n'est pas inversible.

b) D'après a), $f - \lambda I_E$ n'est pas inversible. On sait que, puisque les espaces de départ et d'arrivée de $f - \lambda I_E$ (c'est-à-dire E, dans les deux cas) sont de même dimension, $f - \lambda I_E$ est un isomorphisme si et seulement si c'est une application injective.

Puisque $f - \lambda I_E$ n'est pas un isomorphisme (c'est-à-dire puisque c'est une application non-inversible), ce n'est donc pas une application injective : $\operatorname{Ker}(f - \lambda I_E) \neq \{0\}$. Donc il existe $v \in \operatorname{Ker}(f - \lambda I_E)$ tel que $v \neq 0$.

Puisque $v \in \text{Ker}\,(f - \lambda I_E)$, $(f - \lambda I_E)(v) = 0$, c'est-à-dire $f(v) - \lambda v$ ou $f(v) = \lambda v$.

c) Une famille à un seul élément est toujours libre si l'élément est non-nul (ce qui est le cas : on a supposé $v_1 \neq 0$).

d) $0 = f(0) = f(a_1v_1 + ... + a_{n+1}v_{n+1}) = a_1f(v_1) + ... + a_{n+1}f(v_{n+1}) = a_1\lambda_1v_1 + ... + a_{n+1}\lambda_{n+1}v_{n+1}$

e)

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1a_1v_1 + ... + \lambda_{k+1}a_{k+1}v_{k+1} - \lambda_{k+1}(a_1v_1 + ... + a_{k+1}v_{k+1}) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1v_1 + ... + (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_kv_k + (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})a_{k+1}v_{k+1} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1v_1 + ... + (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_kv_k \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence est que $(v_1, ..., v_k)$ est libre donc $(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1 = ... = (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_k = 0$. Or $\lambda_1 \neq \lambda_{k+1}, ..., \lambda_k \neq \lambda_{k+1}$ donc $\lambda_1 - \lambda_{k+1} \neq 0$ etc. Donc $a_1 = 0, ..., a_k = 0$.

f) Puisque $a_1v_1 + ... + a_kv_k + a_{k+1}v_{k+1} = 0$ et $a_1 = ... = a_k = 0$, on doit avoir $a_{k+1}v_{k+1} = 0$. Or $v_{k+1} \neq 0$ donc $a_{k+1} = 0$.
On a montré que, si $a_1v_1 + ... + a_{k+1}v_{k+1} = 0$, alors $a_1 = ... = a_{k+1} = 0$. On a donc montré que $(v_1, ..., v_{k+1})$ était une famille libre. C'était ce qu'on voulait.

g) C'est une famille à n éléments dans un espace E de dimension n. C'est donc une base si et seulement si elle est libre. D'après les questions c), d), e) et f), pour $k = n$, $(v_1, ..., v_n)$ est libre. Donc c'est une base.

h) $f(v_1) = \lambda_1v_1 = \lambda_1v_1 + 0.v_2 + ... + 0.v_n$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(v_2) = \lambda_2v_2 = 0.v_1 + \lambda_2v_2 + 0.v_3 + ...$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et ainsi de suite.
Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$

2. a) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique.
$f(e_1) = (-1, -4, -2) = -e_1 - 4e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = (1, 4, 2) = e_1 + 4e_2 + 2e_3$, $f(e_3) = (-1, -2, 0) = -e_1 - 2e_2 + 0.e_3$
$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
b) $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$
On ajoute la deuxième colonne à la première :

$$\det M = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -\lambda & 4-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

On soustrait la première ligne à la deuxième :

$$\det M = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne puis on utilise la formule du déterminant des matrices $2x2$:

$$\begin{aligned}\det M &= (-\lambda)\det\left(\begin{smallmatrix}3-\lambda & -1\\ 2 & -\lambda\end{smallmatrix}\right)\\ &= (-\lambda)((3-\lambda)(-\lambda)-(-1).2)\\ &= -\lambda(\lambda^2-3\lambda+2)\\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\end{aligned}$$

Ce déterminant est nul pour $\lambda = 0, 1, 2$.
c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$
Cherchons v_1 tel que $f(v_1) = 0.v_1 = 0$. On veut :

$$\begin{gathered}-x+y-z=0\\ -4x+4y-2z=0\\ -2x+2y=0\end{gathered}$$

On résoud ce système et on trouve qu'il se réduit à $x = y$, $z = 0$. Une solution possible (mais il y en a une infinité) est donc $v_1 = (1, 1, 0)$.
Cherchons maintenant v_2 tel que $f(v_2) = 1.v_2$. On veut, pour $v_2 = (x, y, z)$:

$$\begin{gathered}-x+y-z=x\\ -4x+4y-2z=y\\ -2x+2y=z\end{gathered}$$

Soit :

$$\begin{gathered}-2x+y-z\\ -4x+3y-2z\\ -2x+2y-z=0\end{gathered}$$

En faisant la différence entre les équations 1 et 3, on trouve $y = 0$. On doit donc avoir $z = -2x$.
On vérifie que $v_2 = (1, 0, -2)$ est une solution possible.
Cherchons enfin v_3 tel que $f(v_3) = 2.v_3$. On veut :

$$\begin{gathered}-x+y-z=2x\\ -4x+4y-2z=2y\\ -2x+2y=2z\end{gathered}$$

Soit :

$$\begin{gathered}-3x+y-z=0\\ -4x+2y-2z=0\\ -2x+2y-2z=0\end{gathered}$$

En faisant la différence entre les équations 2 et 3, on trouve $x = 0$. On doit donc avoir $y = z$. Une solution possible est $v_3 = (0, 1, 1)$.

d) D'après la question 1. h), $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

1. $M(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ donc $\det(M(x_1, x_2)) = x_2 - x_1 = \prod_{j=2}^{2} \prod_{i=1}^{1} (x_j - x_i)$.

2. a) Pour $k = 0$, la matrice de droite est égale à $M(x_1, ..., x_{n+1})$ donc l'égalité est vraie. Supposons que c'est vrai pour $k < n$. Démontrons-le pour $k + 1$. Par hypothèse de récurrence :

$$\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-k-1} & ... & x_n^{n-k-1} & x_{n+1}^{n-k-1} \\ x_1^{n-k} & ... & x_n^{n-k} & x_{n+1}^{n-k} \\ x_1^{n-k}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-k}(x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0 \end{pmatrix}$$

On soustrait à la ligne $\begin{pmatrix} x_1^{n-k} & ... & x_n^{n-k} & x_{n+1}^{n-k} \end{pmatrix}$ la ligne $\begin{pmatrix} x_1^{n-k-1} & ... & x_n^{n-k-1} & x_{n+1}^{n-k-1} \end{pmatrix}$, multipliée par x_{n+1}. Cela ne change pas le déterminant. La ligne $\begin{pmatrix} x_1^{n-k} & ... & x_n^{n-k} & x_{n+1}^{n-k} \end{pmatrix}$ devient :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} x_1^{n-k} & ... & x_n^{n-k} & x_{n+1}^{n-k} \end{pmatrix} - x_{n+1} \begin{pmatrix} x_1^{n-k-1} & ... & x_n^{n-k-1} & x_{n+1}^{n-k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^{n-k} & ... & x_n^{n-k} & x_{n+1}^{n-k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{n+1}x_1^{n-k-1} & ... & x_{n+1}x_n^{n-k-1} & x_{n+1}^{n-k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 - x_{n+1})x_1^{n-k-1} & ... & (x_n - x_{n+1})x_n^{n-k-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-k-1} & ... & x_n^{n-k-1} & x_{n+1}^{n-k-1} \\ x_1^{n-k-1}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-k-1}(x_n - x_{n+1}) & 0 \\ x_1^{n-k}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-k}(x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est la propriété qu'on voulait, au rang $k + 1$.

b) Pour $k = n$, la question précédente donne :

$$\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = \det \begin{pmatrix} 1 & ... & 1 & 1 \\ (x_1 - x_{n+1}) & ... & (x_n - x_{n+1}) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) & 0 \end{pmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière colonne (de numéro $n + 1$). Un seul coefficient de la dernière colonne est non-nul, celui qui est situé sur la première ligne. Donc :

$$\det M(x_1, ..., x_{n+1}) = (-1)^{n+2} \det \begin{pmatrix} (x_1 - x_{n+1}) & ... & (x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

c) On remarque que $(-1)^{n+2} = (-1)^2(-1)^n = (-1)^n$ et on utilise la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes :

$$
\begin{aligned}
\det M(x_1, ..., x_{n+1}) &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} (x_1 - x_{n+1}) & (x_2 - x_{n+1}) & ... & (x_n - x_{n+1}) \\ x_1(x_1 - x_{n+1}) & x_2(x_2 - x_{n+1}) & ... & x_n(x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1 - x_{n+1}) & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n (x_1 - x_{n+1}) \det \begin{pmatrix} 1 & (x_2 - x_{n+1}) & ... & (x_n - x_{n+1}) \\ x_1 & x_2(x_2 - x_{n+1}) & ... & x_n(x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1}(x_2 - x_{n+1}) & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1}) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & (x_n - x_{n+1}) \\ x_1 & x_2 & ... & x_n(x_n - x_{n+1}) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1}(x_n - x_{n+1}) \end{pmatrix} \\
&= ... \\
&= (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1})...(x_n - x_{n+1}) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1})...(x_n - x_{n+1}) \det M(x_1, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

d) D'après l'hypothèse de récurrence au rang n, $\det(M(x_1, ..., x_n)) = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i)$. Donc :

$$
\begin{aligned}
\det M(x_1, ..., x_{n+1}) &= (-1)^n (x_1 - x_{n+1})(x_2 - x_{n+1})...(x_n - x_{n+1}) \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i) \\
&= (-1)(x_1 - x_{n+1})(-1)(x_2 - x_{n+1})...(-1)(x_n - x_{n+1}) \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i) \\
&= (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)...(x_{n+1} - x_n) \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{(n+1)-1} (x_{n+1} - x_i) \right) \times \left(\prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i) \right) \\
&= \prod_{j=2}^{n+1}\prod_{i=1}^{j-1}(x_j - x_i)
\end{aligned}
$$

Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n + 1$.