

TD : Algèbre

Exercice 1 : [Cours]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ inversible. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = 0$ si et seulement si $X = 0$.
2. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées ? Échelonnées réduites ? Pour la ou les matrices échelonnées réduites, indiquer quels sont les pivots.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : [Algorithme de Gauss]

Pour chacune des quatre matrices indiquées, répondre aux questions.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2/5 \\ 4 & -1 & 4 & 6/5 \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, on calcule la matrice échelonnée réduite associée à la matrice considérée, au moyen de l'algorithme de Gauss.

À chaque étape, noter les matrices élémentaires correspondant aux opérations élémentaires effectuées.

- a) Si la première colonne est nulle, ne rien faire. Sinon, si c'est nécessaire, permuter deux lignes, de façon à ce que le premier coefficient de la première colonne ne soit pas nul. Ensuite, au moyen de transvections, transformer la matrice en une autre matrice, dont la première colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $\beta \neq 0$.

- b) Si la première colonne est nulle, faire la question a) en remplaçant « première colonne » par « deuxième colonne ».

Sinon, on ne touche plus à la première ligne. Si la deuxième colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ne rien faire. Sinon, si c'est nécessaire, permuter deux lignes, de façon à ce que le deuxième coefficient de la deuxième colonne ne soit pas nul. Ensuite, au moyen de transvections, transformer la matrice en une autre matrice, dont la deuxième colonne est de la forme $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Reprendre les étapes précédentes pour les colonnes suivantes. [Remarque : il faut, à l'étape numéro k , considérer la k -ième colonne. Au moyen de transvections (et, éventuellement, d'une permutation), il faut alors transformer la matrice pour que ses k premières colonnes forment une matrice échelonnée. Lorsqu'on a considéré toutes les colonnes, la matrice tout entière est échelonnée.]

d) Avec des dilatations, ramener à 1 la valeur du premier coefficient non-nul de chaque ligne.

e) Trouver la colonne la plus à droite contenant un pivot (c'est-à-dire un élément qui est le premier élément non-nul de sa ligne). Avec des transvections, ramener à 0 tous les éléments situés au-dessus du pivot.

f) Répéter la question e) pour l'avant-dernière colonne la plus à droite contenant un pivot et ainsi de suite.

g) Constater que la matrice obtenue est bien échelonnée réduite.

2. En utilisant les matrices élémentaires notées au cours de la première question, trouver M_A inversible et U_A échelonnée réduite telles que, si on note A la matrice initiale, $M_A A = U_A$.

3. Pour les matrices carrées seulement : ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, quel est leur inverse ?

Exercice 3 :

On utilisera dans cet exercice les résultats de l'exercice 2.

1. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_3 = 5 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2/5 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 6/5 \end{cases}$$

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & 2/5 \\ 4 & -1 & 4 & 6/5 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

b) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

c) Quelles sont les variables essentielles et les variables libres de ce système ?

d) Montrer que la solution est unique et la calculer.

2. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2 \\ -2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_2 - 6x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

- a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ -2 & 9 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.
- b) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.
- c) Calculer la quatrième ligne de $B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et montrer que le système n'admet pas de solution.
3. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 = -2 \\ -2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

- a) On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.
- b) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.
- c) Quelles sont les variables essentielles et les variables libres de ce système ?
- d) Déterminer les solutions du système en fonction de la valeur des variables libres.
4. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

- a) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$.
- b) Montrer qu'il existe une unique solution et la calculer.

Exercice 4 :

1. a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 5 \\ -2 & 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$. À l'aide de l'algorithme de Gauss, montrer que A est inversible et calculer son inverse.
- b) Montrer que le système suivant a une unique solution et la calculer :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -\frac{1}{2}x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

2. Calculer la matrice échelonnée réduite associée au système d'équations suivant. Indiquer si le système a des solutions ou non. S'il a des solutions, indiquer si la solution est unique ou pas. Dans ce cas, si la solution est unique, la calculer ; si elle n'est pas unique, décrire l'ensemble des solutions comme à la question 3. de l'exercice 3.

$$\begin{cases} -x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = -5 \end{cases}$$

Exercice 5 : [Plus difficile]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A et B sont triangulaires supérieures. Montrer que AB est aussi triangulaire supérieure.
2. On suppose de plus que A et B n'ont que des 1 sur leur diagonale. Montrer que c'est également le cas de AB .

Exercice 6 :

Le but de cet exercice est de justifier le fait que « les doubles sommes commutent ».

Soient $n, m \geq 0$ des entiers. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, m\}$, soit a_{ij} un réel. On note M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On note S la somme de tous les éléments de M .

1. Que vaut la somme de tous les éléments situés sur la ligne i de M ?
2. Que vaut la somme de tous les éléments situés sur la colonne j de M ?
3. En déduire deux façons de calculer S , puis que $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}$.