Université Pierre et Marie Curie
LM125
Le 14 février 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

1. Si $AX = 0$, $X = \mathrm{Id} \times X = A^{-1}AX = A^{-1} \times 0 = 0$. D'autre part, si $X = 0$, $AX = A \times 0 = 0$.

2. La première n'est pas échelonnée car le premier coefficient non nul de la deuxième ligne est à gauche du premier coefficient non-nul de la première ligne.
La deuxième est échelonnée. En revanche, elle n'est pas réduite car les premiers coefficients non-nuls des deuxième, troisième et quatrième lignes ne valent pas 1.
La troisième est échelonnée. En revanche, elle n'est pas réduite car le premier élément non-nul de la deuxième ligne n'est pas le seul élément non-nul de sa colonne.
La quatrième est échelonnée et réduite. Ses pivots sont les premiers éléments non-nuls de chaque ligne, c'est-à-dire le premier élément de la première ligne (position $(1,1)$) et le troisième élément de la deuxième ligne (position $(2,3)$).

Exercice 2 :

Pour chaque étape, on donne, dans l'ordre, la transformation élémentaire effectuée, la matrice élémentaire correspondante et la matrice obtenue.
Première matrice :
1. a) $L_1 \leftrightarrow L_2$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
b) $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
d) $L_2 \leftarrow L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
e) Cette colonne est la troisième.
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_3/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. Daprès la question 1. :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $U_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(= \mathrm{Id})$ et :

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On a $M_A A = \mathrm{Id}$. De plus, on vérifie par le calcul que $A M_A = \mathrm{Id}$. Donc A est inversible et son inverse est M_A.

Deuxième matrice :

1. a) $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $L_1 \leftarrow -L_1$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2/4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) C'est la deuxième colonne.

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. On a $U_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Troisième matrice :

1. a) $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

b) $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $L_3 \leftrightarrow L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) La dernière colonne contient un pivot.

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) La troisième colonne contient aussi un pivot.

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La deuxième colonne contient un pivot.

$L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $U_A = I_4$.

$$M_A = \begin{pmatrix} 1&4&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&3&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&-2\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&-2&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -1&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 2&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 29&20&-2&12\\ 5&4&0&3\\ 1&1&0&1\\ -4&-2&1&0 \end{pmatrix}$$

3. On a $M_A A = I_4$. On vérifie par le calcul que $AM_A = I_4$. La matrice A est donc inversible, d'inverse M_A.

Quatrième matrice :

1. a) $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5&0&5&4\\ 0&0&1&1\\ -2&1&-2&2/5\\ 4&-1&4&6/5 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1/5$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 2/5&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5&0&5&4\\ 0&0&1&1\\ 0&1&0&2\\ 4&-1&4&6/5 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1/5$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -4/5&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5&0&5&4\\ 0&0&1&1\\ 0&1&0&2\\ 0&-1&0&-2 \end{pmatrix}$

b) $L_2 \leftrightarrow L_3$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5&0&5&4\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&1\\ 0&-1&0&-2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5&0&5&4\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

d) $L_1 \leftarrow L_1/5$, $\begin{pmatrix} 1/5&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&0&1&4/5\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

e) La première colonne à contenir un pivot est la troisième.

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1&0&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&-1/5\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

2. $U_A = \begin{pmatrix} 1&0&0&-1/5\\ 0&1&0&2\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

$$M_A = \begin{pmatrix} 1&0&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -4/5&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 2/5&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ -1&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6/5&-1&0&0\\ 2/5&0&1&0\\ -1&1&0&0\\ -2/5&0&1&1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice échelonnée réduite associée à la matrice initiale n'est pas l'identité donc la matrice initiale n'est pas inversible.

Exercice 3 :

1. a) $A \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1+5x_3-4\\ 5x_1+6x_3-5\\ -2x_1+x_2-2x_3-2/5\\ 4x_1-x_2+4x_3-6/5 \end{pmatrix}$

Cette matrice est nulle si et seulement si chacune de ses lignes est nulle, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_3 - 4 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_3 - 5 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2/5 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 6/5 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est exactement le système d'équations considéré (après soustraction des termes constants de chaque côté des inégalités).

b) On a vu au cours de l'exercice 2 qu'il existait une matrice inversible M_A telle que $M_A A = B$. D'après la question a), (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Puisque M_A est inversible, d'après la question 1. de l'exercice 1, $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $M_A A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

c) Les trois variables sont essentielles car chacune des trois premières colonnes de B contient un pivot.

d) $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+1/5 \\ x_2-2 \\ x_3-1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} x_1 + 1/5 &= 0 \\ x_2 - 2 &= 0 \\ x_3 - 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Ces égalités sont vérifiées si et seulement si $x_1 = -1/5$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 1$. Le système a donc une unique solution, $(-1/5, 2, 1)$.

2. a) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-4x_2-2 \\ -2x_1+9x_2-3x_3+4 \\ 2x_2-6x_3-1 \\ x_1-5x_2+4x_3-2 \end{pmatrix}$

On a donc $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 2 &= 0 \\ -2x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4 &= 0 \\ 2x_2 - 6x_3 - 1 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent au système d'équations considéré.

b) On a vu à l'exercice 2 qu'il existait M_A inversible telle que $M_A A = B$ (en l'occurence, M_A était l'inverse de A). D'après la première question de l'exercice 1 et la question 2.a) de l'exercice 3, (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ et cette dernière égalité est vraie si et seulement si $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = M_A A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

c) La quatrième ligne de $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1.(-1) = -1$. Cette dernière ligne n'est jamais nulle car $-1 \neq 0$. Il est donc impossible que $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ et le système n'admet pas de solution.

3. a) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1-2x_2-3x_3 \\ -2x_1+2x_3+2 \\ -2x_2-4x_3-1 \end{pmatrix}$

Cette matrice est nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_3 + 2 &= 0 \\ -2x_2 - 4x_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent au système considéré.

b) On a vu à l'exercice 2 qu'il existait une matrice M_A inversible telle que $M_A A = B$. D'après la question a), (x_1, x_2, x_3) est solution du système si et seulement si $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. D'après la question 1 de l'exercice 1, cette dernière égalité est elle-même vraie si et seulement si $M_A A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

c) La première et la deuxième colonne de B contiennent des pivots. En revanche, la troisième colonne n'en contient pas. Les variables x_1 et x_2 sont donc essentielles ; la variables x_3 est donc libre.

d) D'après la question b), (x_1, x_2, x_3) est une solution du système si et seulement si $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

Or $B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_3-1 \\ x_2+2x_3+1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 1 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 1/2 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à : $x_1 = x_3 + 1, x_2 = -2x_3 - 1/2$.

L'ensemble des solutions du système est donc $\{(x_3+1, -2x_3-1/2, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$. En particulier, il y en a une infinité.

4. a) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2-x_3 \\ x_1+2x_3 \\ -x_1+4x_2-3x_3 \end{pmatrix}$ donc $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_3 &= -2 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

ce qui est exactement le système considéré.
b) On a vu dans l'exercice 2 qua A était inversible. Si $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b$, alors $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}b$.
Réciproquement, si $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}b$, alors $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=AA^{-1}b=b$.
Il existe donc une seule matrice colonne $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ tell que $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=b$: il s'agit de $A^{-1}b$. La solution du système d'équations est donc unique et vérifie $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}b$.
On a vu à l'exercice 2 que $A^{-1}=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-1/2&1/2&1/2\\-2&1&1\end{pmatrix}$. La solution est donc :

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&-2\\-1/2&1/2&1/2\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1/2\\0\end{pmatrix}$$

On trouve donc qu'il y a une seule solution : $(-2,1/2,0)$.

Exercice 5 :
1. On note $(AB)_{ij}$ le coefficient de AB situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. Pour montrer que AB est triangulaire supérieure, il suffit de montrer que, si $i>j$, $(AB)_{ij}=0$.
Calculons $(AB)_{ij}$:

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$$

Supposons $i>j$. Pour tout $k\in\{1,...,n\}$, il est impossible d'avoir $i\le k$ et $k\le j$, sinon on aurait $i\le j$. On a donc nécessairement $i>k$ ou $k>j$.
Si on a $i>k$, $A_{ik}=0$ car A est triangulaire supérieure. Si $k>j$, $B_{kj}=0$ car B est triangulaire supérieuse. Donc, quelle que soit la valeur de k, $A_{ik}B_{kj}=0$. Cela implique que, si $i<j$, la somme $\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}$ ne contient que des termes nuls. En particulier, on a alors $(AB)_{ij}=0$.
La matrice AB est donc triangulaire supérieure.
2. On veut montrer que $(AB)_{ii}=1$ pour tout i.

$$(AB)_{ii}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}$$

Si $k<i$, $A_{ik}=0$ car A est triangulaire supérieure. De plus, si $k>i$, $B_{ki}=0$ car B est triangulaire supérieure. Donc, si $k<i$ ou $k>i$, $A_{ik}B_{ik}=0$. Le seul terme de la somme qui n'est pas nécessairement nul est donc celui correspondant à $k=i$:

$$(AB)_{ii}=A_{ii}B_{ii}=1\times 1=1$$

(On vient d'utiliser le fait que les termes sur la diagonale de A ou de B valent 1.)
Donc $(AB)_{ii}=1$.

Exercice 6 :

1. Elle vaut $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$.
2. Elle vaut $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.
3. S est la somme sur l'ensemble des lignes de la somme des éléments par ligne :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$$

S est aussi la somme sur l'ensemble des colonnes de la somme des éléments par colonne :

$$S = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$