Université Pierre et Marie Curie
LM125

Le 14 février 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

# TD : Algèbre

## Corrigé

**Exercice 4 :**

1. a) On applique l'algorithme de Gauss comme à l'exercice 2.

On commence par mettre la première colonne sous la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On met ensuite la deuxième colonne sous la forme $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On met enfin la troisième colonne sous la forme $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par des dilatations, on ramène à 1 la valeur de chaque pivot.

$L_2 \leftarrow -2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par des transvections, on annule tous les éléments de la quatrième colonne, à l'exception du dernier, qui est pivot.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + 6L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On procède de façon similaire sur la troisième colonne.

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On procède encore de la même façon sur la deuxième colonne.

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice échelonnée réduite associée à $A$ est donc $I_4$. La matrice $M_A$ telle que $M_A A = I_4$ vaut :

$$\begin{aligned} M_A &= \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&-3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&6\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7&-10&4&5\\6&-22&10&8\\0&-4&2&1\\1&-2&1&1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le calcul montre que $AM_A = I_4$. La matrice $A$ est donc inversible et son inverse est $M_A$.
b) Ce système est équivalent (de la même façon que dans la question 4 de l'exercice 3) à :

$$A \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\-2 \end{pmatrix}$$

Puisque la matrice $A$ est inversible, cette égalité est atteinte si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7&-10&4&5\\6&-22&10&8\\0&-4&2&1\\1&-2&1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\\-20\\-4\\-2 \end{pmatrix}$$

Le système a donc une unique solution : $x_1 = -7, x_2 = -20, x_3 = -4, x_4 = -2$.
2. La matrice augmentée associée au système d'équations vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&-1&2&-1&0\\1&2&0&1&-2&3\\-2&-4&-1&1&2&-5 \end{pmatrix}$$

Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.
$L_1 \leftrightarrow L_2, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0&1&-2&3\\0&0&-1&2&-1&0\\-2&-4&-1&1&2&-5 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\2&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0&1&-2&3\\0&0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&3&-2&1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0&1&-2&3\\0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&1&-1&1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow -L_2, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0&1&-2&3\\0&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&-1&1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&2\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0&1&-2&3\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&-1&1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3, \begin{pmatrix} 1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&2&0&0&-1&2\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&-1&1 \end{pmatrix}$
La matrice échelonnée réduire associée au système est donc $\begin{pmatrix} 1&2&0&0&-1&2\\0&0&1&0&-1&2\\0&0&0&1&-1&1 \end{pmatrix}$.

Les variables essentielles sont $x_1, x_3$ et $x_4$ ; $x_2$ et $x_5$ sont libres. Comme dans la troisième question de l'exercice 3, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est solution du système si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_5 - 2 &= 0 \\ x_3 - x_5 - 2 &= 0 \\ x_4 - x_5 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

et à :

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + x_5 + 2 \\ x_3 &= x_5 + 2 \\ x_4 &= x_5 + 1 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc tous les quintuplets de la forme $(-2x_2 + x_5 + 2, x_2, x_5 + 2, x_5 + 1, x_5)$, pour $x_2$ et $x_5$ des réels quelconques. En particulier, il y a une infinité de solutions.