TD : Algèbre

Exercice 1 :

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } \begin{array}{r} 2a+b+3c-2d=0 \\ 2a+2b-4c+4d=0 \end{array} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } \begin{array}{r} x_1+x_3+x_4-x_5=0 \\ x_2-2x_3+8x_4-2x_5=0 \\ -2x_1+x_2-3x_3+3x_4=0 \end{array} \right\}$$

Exercice 2 :

Déterminer une base de chacun des espaces vectoriels suivants puis compléter les bases trouvées en des bases de $\mathbb{R}^4$.

$$E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_2 = \text{Vect}\left\{ (1,2,-2,1), (0,1,1,0), (-1,-1,3,0), (1,1,-3,-1) \right\}$$

Exercice 3 :

Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $f(e_1)=(3,-1,2,1)$, $f(e_2)=(-5,3,-1,-2)$ et $f(e_3)=(1,1,3,0)$.

1. Calculer $f((x,y,z))$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Calculer une base de $\operatorname{Ker} f$.

3. a) Montrer que $\operatorname{Im} f = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$.
b) Calculer une base de $\operatorname{Im} f$.

4. Quel est le rang de f ? Vérifier que le théorème du rang est respecté.

Exercice 4 :

Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $f(e_1)=(-2,6,-12,-8)$, $f(e_2)=(3,-1,10,4)$, $f(e_3)=(0,-2,2,2)$, $f(e_4)=(3,0,9,3)$.

1. Calculer une base de $\operatorname{Ker} f$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} f$?

2. a) À l'aide du théorème du rang, déterminer le rang de f.
b) Calculer une base de $\operatorname{Im} f$.

3. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

b) Montrer que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 5 :

1. Soit $E = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2\}$, avec $e_1 = (1, 4, -1, 0)$ et $e_2 = (-1, -2, -1, -2)$.
a) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b, c, d) = \lambda e_1 + \mu e_2$ si et seulement si $-3a + b + c = 0$ et $-4a + b + d = 0$.
b) En déduire que $E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } -3a + b + c = 0 \text{ et } -4a + b + d = 0\}$.

2. [Plus difficile] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *forme linéaire* sur $\mathbb{R}^n$ une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, il existe $a_1, ..., a_n$ tels que, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f((x_1, ..., x_n)) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$. [Indication : poser $a_1 = f(e_1), a_2 = f(e_2), ...$ où $(e_1, e_2, ...)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.]
b) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On note d sa dimension et $(v_1, ..., v_d)$ une base de E. On complète $(v_1, ..., v_d)$ en une base $(v_1, ..., v_d, w_{d+1}, ..., w_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $k \in \{d + 1, ..., n\}$, on note p_k la projection sur $\operatorname{Vect}(w_k)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(v_1, ..., v_d, w_{d+1}, ..., w_{k-1}, w_{k+1}, ..., w_n)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que $x \in E$ si et seulement si $p_k(x) = 0$ pour tout $k = d + 1, ..., n$.
c) Pour tout $k = d + 1, ..., n$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note $r_k(x)$ le réel tel que $p_k(x) = r_k(x)w_k$. Montrer que r_k est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.
d) Montrer qu'il existe un système de $n - d$ équations dont les solutions sont exactement les éléments de E.

Exercice 6 : [Plus difficile]

1. Trouver une famille libre infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel des suites réelles. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.
[Remarque : on dit qu'une famille infinie est libre si tout sous-ensemble fini de cette famille est libre.]

2. Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On note U_T l'ensemble des suites réelles T-périodiques. Quelle est la dimension de U_T ?

3. Montrer que $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ est de dimension infinie.