TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

1. Résolvons ce système d'équations. La matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} = U_{\tilde{A}}$
Les solutions sont les (a, b, c, d) tels que :

$$U_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow a + 5c - 4d = 0 \text{ et } b - 7c + 6d = 0$$
$$\Leftrightarrow a = -5c + 4d \text{ et } b = 7c - 6d$$

Les solutions sont donc $\{(-5c + 4d, 7c - 6d, c, d) \text{ tq } c, d \in \mathbb{R}\}$.
On a donc $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -5c+4d & 7c-6d \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tq } c, d \in \mathbb{R} \right\}$.
Pour tous $c, d \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} -5c+4d & 7c-6d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $E_1 = \{c \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tq } c, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect } \{\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.
La famille $\{\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ est libre. En effet, si $\lambda_1 \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} -5\lambda_1+4\lambda_2 & 7\lambda_1-6\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc, en regardant la deuxième ligne, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Puisque $\{\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ est libre et qu'elle est génératrice de E_1, c'est une base de E_1.

2. Résolvons ce système d'équations. La matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Appliquons-lui l'algorithme de Gauss :
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Les solutions sont les $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 + 4x_4 - x_5 = 0 \text{ et } x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \text{ et } x_3 - 3x_4 = 0$$

Les solutions sont donc les $(-4x_4+x_5, -2x_4+2x_5, 3x_4, x_4, x_5)$ avec x_4, x_5 des réels quelconques :

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(-4x_4+x_5, -2x_4+2x_5, 3x_4, x_4, x_5) \text{ tq } x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_4(-4,-2,3,1,0) + x_5(1,2,0,0,1) \text{ tq } x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\,\{(-4,-2,3,1,0),(1,2,0,0,1)\} \end{aligned}$$

La famille $\{(-4,-2,3,1,0),(1,2,0,0,1)\}$ est libre : si $\lambda_1(-4,-2,3,1,0)+\lambda_2(1,2,0,0,1)=0$, alors $(-4\lambda_1+\lambda_2, -2\lambda_1+2\lambda_2, 3\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0,0,0)$ donc $\lambda_1=\lambda_2=0$.
Donc $\{(-4,-2,3,1,0),(1,2,0,0,1)\}$ est une famille libre et génératrice de E_2 ; c'est une base de E_2.

Exercice 2 :
1. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & -3 & 7 \end{pmatrix}$. Appliquons à A l'algorithme de Gauss jusqu'à ce qu'on obtienne une matrice échelonnée :
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A ne change pas l'espace vectoriel engendré par les lignes de A. On a donc :

$$E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

De plus, la famille $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ est libre : si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, alors $\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ -3\lambda_1+5\lambda_2 \\ \lambda_1-2\lambda_2 \\ \lambda_1+3\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $2\lambda_1 = 0$, ce qui implique $\lambda_1 = 0$. On obtient donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 5\lambda_2 \\ -2\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = 0$.
La famille $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ est libre et génératrice de E_1. C'est donc une base de E_1.
Notons $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On va compléter (w_1, w_2) en une base de $\mathbb{R}^4$, $(w_1, w_2, \tilde{w_3}, \tilde{w_4})$.
Choisissons $\tilde{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{w_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (les vecteurs de la base canonique correspondant aux colonnes où la matrice échelonnée obtenue n'a pas de pivot).

La famille $(w_1, w_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4)$ est libre. En effet, si $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 \tilde{w}_3 + \lambda_4 \tilde{w}_4 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ -3\lambda_1+5\lambda_2 \\ \lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3 \\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 5\lambda_2 \\ -2\lambda_2+\lambda_3 \\ 3\lambda_2+\lambda_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0
\end{aligned}$$

La famille $(w_1, w_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4)$ est libre. Comme la dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4, il s'agit d'une famille libre de cardinal maximal (il n'y a pas de famille libre de cardinal plus grand que la dimension de $\mathbb{R}^4$). C'est donc une base.

2. Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Échelonnons cette matrice par l'algorithme de Gauss.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A ne change pas l'espace vectoriel engendré par les lignes de A donc :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \text{Vect}\{(1,2,-2,1), (0,1,1,0), (-1,-1,3,0), (1,1,-3,-1)\} \\
&= \text{Vect}\{(1,2,-2,1), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}
\end{aligned}$$

La famille $\{(1,2,-2,1), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$ est libre. En effet, si $\lambda_1(1,2,-2,1)+\lambda_2(0,1,1,0)+\lambda_3(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$, alors :

$$\begin{aligned}
(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3) &= (0,0,0,0) \\
\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } (0, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_3) &= (0,0,0,0) \\
\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

Notons $w_1 = (1,2,-2,1)$, $w_2 = (0,1,1,0)$ et $w_3 = (0,0,0,1)$. On veut compléter (w_1, w_2, w_3) en une base de $\mathbb{R}^4$. Il faut donc trouver $\tilde{w}_4$ tel que $(w_1, w_2, w_3, \tilde{w}_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. On

prend $\tilde{w}_4 = (0,0,1,0)$ (le troisième vecteur de la base canonique, puisque la matrice échelonnée obtenue n'a pas de pivot sur la troisième colonne).
La famille $(w_1, w_2, w_3, \tilde{w}_4)$ est libre. En effet, si $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + \lambda_4 \tilde{w}_4 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
(\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_3) &= (0,0,0,0) \\
\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ et } (0, \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_4, \lambda_3) &= (0,0,0,0) \\
\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 &= 0
\end{aligned}$$

La famille $(w_1, w_2, w_3, \tilde{w}_4)$ est donc une famille libre de dimension maximale (puisque son cardinal est le même que la dimension de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire 4). C'est donc une base.

Exercice 3 :

1. $f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(3,-1,2,1) + y(-5,3,-1,-2) + z(1,1,3,0) = (3x - 5y + z, -x + 3y + z, 2x - y + 3z, x - 2y)$
2. Le noyau de f est l'ensemble des (x,y,z) tels que $f((x,y,z)) = (0,0,0,0)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
3x - 5y + z &= 0 \\
-x + 3y + z &= 0 \\
2x - y + 3z &= 0 \\
x - 2y &= 0
\end{aligned}$$

Résolvons ce système. La matrice augmentée associée est $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss :

$L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_2/4 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2/4 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2/4 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow -L_1 \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les solutions du système sont les (x, y, z) tels que $\begin{pmatrix} 1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\y\\z\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$, soit :

$$x = -2z \text{ et } y = -z$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{(-2z, -z, z) \text{ tq } z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, -1, 1) \text{ tq } z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(2, -1, 1)\}$.
La famille $\{(2, -1, 1)\}$ est libre : elle ne contient qu'un seul élément et il est non-nul. Comme elle est aussi génératrice de $\operatorname{Ker} f$ (puisque $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(2, -1, 1)\}$), c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

3. a) La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ (propriété du cours), ce qui signifie que $\operatorname{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \operatorname{Im} f$.
b) Posons $A = \begin{pmatrix} 3&-1&2&1\\-5&3&-1&-2\\1&1&3&0 \end{pmatrix}$. Appliquons l'algorithme de Gauss à cette matrice.
$L_1 \leftrightarrow L_3$ $\begin{pmatrix} 1&1&3&0\\-5&3&-1&-2\\3&-1&2&1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftrightarrow L_2 + 5L_1$ $\begin{pmatrix} 1&1&3&0\\0&8&14&-2\\3&-1&2&1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftrightarrow L_3 - 3L_1$ $\begin{pmatrix} 1&1&3&0\\0&8&14&-2\\0&-4&-7&1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2/2$ $\begin{pmatrix} 1&1&3&0\\0&8&14&-2\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$
Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A ne change pas l'espace vectoriel engendré par les lignes de A. Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\{(3, -1, 2, 1), (-5, 3, -1, -2), (1, 1, 3, 0)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1, 1, 3, 0), (0, 8, 14, -2)\} \end{aligned}$$

La famille $\{(1, 1, 3, 0), (0, 8, 14, -2)\}$ est libre : si $\lambda_1(1, 1, 3, 0) + \lambda_2(0, 8, 14, -2) = (0, 0, 0, 0)$, alors $(\lambda_1, \lambda_1 + 8\lambda_2, 3\lambda_1 + 14\lambda_2, -2\lambda_2) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille $\{(1, 1, 3, 0), (0, 8, 14, -2)\}$ est à la fois libre et génératrice dans $\operatorname{Im} f$. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

4. Le rang de f est la dimension de $\operatorname{Im} f$. C'est donc 2, puisque la base de $\operatorname{Im} f$ que nous avons trouvée en 3.b) a 2 éléments.
Le théorème du rang dit que $\operatorname{rang} f + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$.
Ici, $\operatorname{rang} f = 2$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ (puisque la base trouvée en 2. a un seul élément) et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
On a bien $2 + 1 = 3$.

Exercice 5 :

1. a) On cherche s'il existe λ, μ tels que :

$$(a, b, c, d) = \lambda(1, 4, -1, 0) + \mu(-1, -2, -1, -2) = (\lambda - \mu, 4\lambda - 2\mu, -\lambda - \mu, -2\mu)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= a \\ 4\lambda - 2\mu &= b \\ -\lambda - \mu &= c \\ -2\mu &= d \end{aligned}$$

La matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 4 & -2 & b \\ -1 & -1 & c \\ 0 & -2 & d \end{pmatrix}$. Calculons sa matrice échelonnée réduite par l'algorithme de Gauss :

$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & b-4a \\ -1 & -1 & c \\ 0 & -2 & d \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & b-4a \\ 0 & -2 & c+a \\ 0 & -2 & d \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & b-4a \\ 0 & 0 & b+c-3a \\ 0 & -2 & d \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & b-4a \\ 0 & 0 & b+c-3a \\ 0 & 0 & b-4a+d \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b/2-2a \\ 0 & 0 & b+c-3a \\ 0 & 0 & b-4a+d \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b/2-a \\ 0 & 1 & b/2-2a \\ 0 & 0 & b+c-3a \\ 0 & 0 & b-4a+d \end{pmatrix}$

Pour que le système puisse avoir des solutions, il faut que $b+c-3a = b-4a+d = 0$ (sinon, il y a une ligne dont tous les éléments sont nuls sauf le dernier). Si $b+c-3a = b-4a+d = 0$, il n'y a aucune ligne dont tous les éléments sont nuls sauf le dernier et le système a une solution. Donc λ et μ existent si et seulement si :

$$b+c-3a = 0 \text{ et } b-4a+d = 0$$

b) $E = \{\lambda e_1 + \mu e_2 \text{ tq } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Donc $(a,b,c,d) \in E$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $(a,b,c,d) = \lambda e_1 + \mu e_2$, c'est-à-dire, d'après la question précédente, si et seulement si $-3a+b+c = 0$ et $-4a+b+d = 0$.

2. a) $f(x_1,...,x_n) = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $(v_1,...,v_d,w_{d+1},...,w_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, il existe $\lambda_1,...,\lambda_n$ uniques tels que :

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_d v_d + \lambda_{d+1} w_{d+1} + ... + \lambda_n w_n$$

Démonstrons d'abord que $x \in E$ si et seulement si $\lambda_{d+1} = ... = \lambda_n = 0$: en premier lieu, si $x \in E$, puisque $(v_1,...,v_d)$ est une base de E, il existe $\mu_1,...,\mu_d$ tels que :

$$x = \mu_1 v_1 + ... + \mu_d v_d = \mu_1 v_1 + ... + \mu_d v_d + 0.w_{d+1} + ... + 0.w_n$$

Comme les λ_k sont uniques, on doit avoir $\lambda_1 = \mu_1, ..., \lambda_d = \mu_d, \lambda_{d+1} = 0, ...$ On a donc bien $\lambda_{d+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Dans l'autre sens, si $\lambda_{d+1} = ... = \lambda_n = 0$, alors :

$$x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_d v_d \in \text{Vect}\{v_1,...,v_d\} = E$$

On a donc démontré que $x \in E$ si et seulement si $\lambda_{d+1} = ... = \lambda_n = 0$.
Pour tout $k \in \{d+1,...,n\}$:

$$x = (\lambda_k w_k) + (\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{d+1} w_{d+1} + ... + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_{k+1} w_{k+1} + ... + \lambda_n w_n)$$

Le premier des deux termes entre parenthèses appartient à Vect (w_k) et le deuxième à Vect $(v_1, ..., v_d, w_{d+1}, ...$
Donc, par définition de la projection, $p_k(x) = \lambda_k w_k$.
Donc $p_k(x) = 0$ pour tout $k \geq d+1$ si et seulement si $\lambda_k w_k = 0$ pour tout $k \geq d+1$, ce qui est la même chose que de dire que $\lambda_k = \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0$ (puisque les w_k sont non-nuls : il n'y a jamais de vecteur nul dans une base (ni même dans une famille libre)). Comme on vient de le voir, c'est équivalent au fait que $x \in E$.

c) C'est une application linéaire : comme p_k est linéaire, on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$r_k(\lambda x + \mu y) w_k = p_k(\lambda x + \mu y) = \lambda p_k(x) + \mu p_k(y) = \lambda r_k(x) w_k + \mu r_k(y) w_k = (\lambda r_k(x) + \mu r_k(y)) w_k$$

Donc $r_k(\lambda x + \mu y) = \lambda r_k(x) + \mu r_k(y)$.
Comme l'ensemble d'arrivée de r_k est $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire.

d) Pour tout $k \geq d+1$, $p_k(x) = 0$ ssi $r_k(x) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } p_k(x) = 0 \forall k = d+1, ..., n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } r_k(x) = 0 \forall k = d+1, ..., n\} \end{aligned}$$

Pour tout $k \geq d+1$, on note $a_1^{(k)}, ..., a_n^{(k)}$ des réels comme en a), tels que, pour tout $(x_1, ..., x_n)$:

$$r_k((x_1, ..., x_n)) = a_1^{(k)} x_1 + ... + a_n^{(k)} x_n$$

On a alors :

$$E = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1^{(k)} x_1 + ... + a_n^{(k)} x_n = 0 \forall k = d+1, ..., n\}$$

Donc E est l'ensemble des $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant les équations $a_1^{(k)} x_1 + ... + a_n^{(k)} x_n = 0$. Il y a bien $n - d$ telles équations.

Exercice 6 :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note e_k la suite $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ qui ne contient que des zéros sauf en position k où elle contient un 1.
Cette famille est libre. En effet, soient $\{k_1, ..., k_n\}$ est un ensemble fini et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 e_{k_1} + ... + \lambda_n e_{k_n} = 0$. Le k_1-ème élément de la suite $\lambda_1 e_{k_1} + ... + \lambda_n e_{k_n}$ vaut $\lambda_1.1 + \lambda_2.0 + ... + \lambda_n.0 = \lambda_1$ (car tous les e_{k_s} ont un 0 en position k_1 sauf si $s = 1$). Donc $\lambda_1 = 0$. De même, $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
Si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ était de dimension finie, toutes les familles libres seraient de cardinal au plus la dimension de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En particulier, toutes les familles libres seraient finies, ce qui n'est pas le cas.

2. U_T est de dimension T. En effet, notons $\phi : \mathbb{R}^T \to U_T$ l'application linéaire définie de la façon suivante : pour tout $(x_0, ..., x_{T-1}) \in \mathbb{R}^T$, la suite $u = \phi((x_0, ..., x_{T-1}))$ est la suite telle que, pour tout k, $u_k = x_{r(k)}$, $r(k)$ désignant le reste de k dans la division euclidienne par T.
L'application ϕ est bien définie et linéaire. Elle est injective : si $u = \phi((x_0, ..., x_{T-1})) = 0$, alors, pour tout $k \leq T-1$, $x_k = u_k = 0$. Elle est surjective : pour tout $u \in U_T$, $u_k = u_{r(k)}$ car $k - r(k)$ est un multiple de T et u est T-périodique. Donc $u = \phi((u_0, ..., u_{T-1}))$.

Donc ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^T$ et U_T. Les espaces U_T et $\mathbb{R}^T$ doivent donc être de même dimension (cela se démontre par exemple grâce au théorème du rang, ou en montrant que l'image par ϕ d'une base de $\mathbb{R}^T$ est une base de U_T). Donc $\dim U_T = \dim \mathbb{R}^T = T$.

3. Comme en 1., on va construire une famille libre de dimension infinie.
Pour tout $n \geq 1$, on note $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f_n(x) = \max\left(0, \left(x - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - x\right)\right)$$

Cette fonction est continue et vaut 0 ssi $x \notin \left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right[$.
La famille (f_n) est libre. En effet, supposons que $\lambda_1 f_{n_1} + ... + \lambda_k f_{n_k} = 0$. Alors, sur $\left]\frac{1}{n_1+1}; \frac{1}{n_1}\right[$, toutes les f_{n_s} sont nulles sauf f_{n_1}. Donc sur cet intervalle, la somme vaut $\lambda_1 f_{n_1}$. Mais puisque la somme est nulle et puisque f_{n_1} n'est pas nulle sur $\left]\frac{1}{n_1+1}; \frac{1}{n_1}\right[$, on doit avoir $\lambda_1 = 0$. De même, $\lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$.