Université Pierre et Marie Curie
LM125

Le 18 avril 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application telle que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f((x,y,z)) = (x, -2x-y-6z, x+y+4z)$$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (qu'on note $\mathcal{B}$).

2. Calculer le polynôme caractéristique de f, $\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$ et en déduire les valeurs propres de f.

3. On note λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_1 \leq \lambda_2$) les valeurs propres trouvées à la question précédente.
a) Déterminer une base de $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_1 I_{\mathbb{R}^3})$, l'espace propre associé à λ_1.
b) Même question pour $E_2 = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_2 I_{\mathbb{R}^3})$.
c) Calculer $\dim(E_1 + E_2)$. [Indication : une propriété du cours dit que E_1 et E_2 sont en somme directe.] En déduire que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$ puis que E_1 et E_2 sont supplémentaires.

4. Trouver une base $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice D de f est diagonale de la forme $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

5. Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{P}$.

6. En utilisant la relation liant A, D, P et P^{-1}, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application telle que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f((x,y,z)) = (x+2y-2z, 3x-4y+2z, 3x-6y+4z)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

2. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres de f.

3. Donner une base de chaque espace propre de f.

4. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 3 :

Soit $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ une matrice diagonalisable. On note $\chi(x) = \det(M - xI_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M - xI_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} P^{-1}$.
2. En déduire que $\chi(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)...(\lambda_n - x)$.
3. Calculer $(\lambda_1 I_n - M)(\lambda_2 I_n - M)...(\lambda_n I_n - M)$.

Exercice 4 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Montrer qu'il existe $a_0, a_1, ..., a_{n^2}$ des réels non tous nuls tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

Exercice 5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux applications linéaires. On suppose que f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$.
On note $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda I_{\mathbb{R}^n})$ le polynôme caractéristique de f. On suppose qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tous différents tels que $\chi_f(\lambda_k) = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.
Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on note E_k^f l'espace propre associé à λ_k : $E_k^f = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_k I_{\mathbb{R}^n})$. Soit, pour tout k, v_k un vecteur non-nul de E_k^f.

1. Montrer que, pour tout k, $E_k^f = \mathrm{Vect}\,(v_k)$.
2. Montrer que, pour tout k, $g(v_k) \in E_k^f$.
3. Montrer que, pour tout k, v_k est un vecteur propre de g.
4. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(g)$ soient toutes les deux diagonales.

Exercice 6 :
Déterminer quelles applications nilpotentes $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont diagonalisables.
On rappelle que u est nilpotente s'il existe $d \geq 1$ tel que $u^d = 0$ (où u^d désigne la composée de u avec elle-même d fois).
[Indication : commencer par trouver quelles peuvent être les valeurs propres d'une application nilpotente.]

Exercice 7 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application telle que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad f((x, y, z)) = (2x - y - z, 2x - 3y - 2z, -x + 3y + 2z)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f et en trouver les valeurs propres.
3. Dans cette question, on montrer que f n'est pas diagonalisable. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle l'est. Il existe alors $\mathcal{P} = (v_1, v_2, v_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. On suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.
a) Calculer le polynôme caractéristique de f en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. En déduire que $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
b) On note $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f - I_{\mathbb{R}^3})$. Montrer que $v_2, v_3 \in E_1$ puis que $\dim E_1 \geq 2$.
c) Calculer une base de E_1 et aboutir à une contradiction.
4. Calculer $(f - I_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - I_{\mathbb{R}^3})$. Trouver un élément w_2 de son noyau qui n'appartient pas à E_1.

5. Trouver w_3, un vecteur propre non-nul de f associé à la valeur propre -1.

6. On note w_1 le vecteur trouvé en 3.c). On admet que $\mathcal{S} = (w_1, w_2, w_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. [Remarque : c'est juste pour éviter de faire le calcul ; la démonstration ne présente pas de difficulté particulière.] Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{S}$.

7. [Difficile] Pouvez-vous trouver $u, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires vérifiant les conditions suivantes :
- u est nilpotente
- g est diagonalisable
- u et g commutent : $u \circ g = g \circ u$
- $u + g = f$?

[Remarque : pour les applications linéaires de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, il existe toujours u et g (uniques) vérifiant ces propriétés. Il s'agit de la « décomposition de Dunford ».]