TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
$f(e_1) = (1, -2, 1), f(e_2) = (0, -1, 1), f(e_3) = (0, -6, 4)$
$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\det(A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & -6 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$
On développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)((-1-\lambda)(4-\lambda) - (-6).1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire 1 et 2.

3. a) $(f - I_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = (x, -2x-y-6z, x+y+4z) - (x, y, z) = (0, -2x-2y-6z, x+y+3z)$
Le noyau est l'ensemble des (x, y, z) tels que $-2x - 2y - 6z = 0$ et $x + y + 3z = 0$. Ces deux équations sont les mêmes (si on multiplie la deuxième par (-2), on retrouve la première), on cherche donc simplement les (x, y, z) tels que :

$$x + y + 3z = 0$$

C'est la même chose que $x = -(y + 3z)$. Les solutions sont les $\{(-y - 3z, y, z) \text{ tq } y, z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$.
La famille $\{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ est génératrice de E_1. Elle est libre : si $\alpha_1(-1, 1, 0) + \alpha_2(-3, 0, 1) = 0$, alors $(-\alpha_1 - 3\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2) = 0$, ce qui implique $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Donc $\{(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ est une base de E_1.

b) $(f - 2\lambda_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = (x, -2x-y-6z, x+y+4z) - (2x, 2y, 2z) = (-x, -2x-3y-6z, x+y+2z)$
On cherche donc les (x, y, z) tels que $(-x, -2x - 3y - 6z, x + y + 2z) = (0, 0, 0)$. Il faut :

$$\begin{matrix} -x = 0 \\ -2x - 3y - 6z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = -2z \end{matrix}$$

Les solutions sont donc les $(0, -2z, z)$, c'est-à-dire que $E_2 = \operatorname{Vect}\{(0, -2, 1)\}$. La famille $\{(0, -2, 1)\}$ est libre : elle possède un seul élément et il est non-nul. C'est donc une base de E_2.

c) Puisque E_1 et E_2 sont en somme directe, $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 + 1 = 3$.
Puisque $E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$, on a (d'après le cours) $\dim(E_1 + E_2) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, avec égalité si et seulement si $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$. Puisque l'égalité est atteinte, on a $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$.
Donc E_1 et E_2 sont en somme directe (c'est-à-dire que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$) et $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$. Ces espaces sont donc supplémentaires.

4. On prend $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (-3, 0, 1), v_3 = (0, -2, 1)$ et on note $\mathcal{P} = (v_1, v_2, v_3)$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$ car il s'agit de l'union d'une base de E_1 et d'une base de E_2, E_1 et E_2 étant supplémentaires.
Puisque $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,(f - I_{\mathbb{R}^3})$, $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = v_2$. Puisque $v_3 \in \mathrm{Ker}\,(f - 2I_{\mathbb{R}^3})$, $f(v_3) = 2v_3$.
Donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{B}} \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) \mathcal{B}_{\mathcal{P}} = PDP^{-1}$
Calculons P^{-1} par l'algorithme de Gauss.
$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftrightarrow L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow -L_1$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
En multipliant les matrices élémentaires, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
On a donc :

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2^n & 2^n & 3.2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} & 6-3.2^{n+1} \\ 2^n-1 & 2^n-1 & 3.2^n-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ cette base.
$f(e_1) = (1, 3, 3), f(e_2) = (2, -4, -6), f(e_3) = (-2, 2, 4)$
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

2.

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{smallmatrix}\right) - \lambda I_3\right) \\
&= \det\left(\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 3 & -4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & 4-\lambda \end{smallmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 3 & -4-\lambda & 2 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{smallmatrix}\right) \\
&= -(-2+\lambda)\det\left(\begin{smallmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) + (2-\lambda)\det\left(\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -4-\lambda \end{smallmatrix}\right) \\
&= (2-\lambda)(8-2\lambda) + (2-\lambda)(\lambda^2+3\lambda-10) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) \\
&= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $2, 1, -2$.

3. Commençons par 2.
$(f - 2I_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (-x+2y-2z, 3x-6y+2z, 3x-6y+2z)$
Le noyau est l'ensemble des (x,y,z) tels que $-x+2y-2z = 0$ et $3x-6y+2z = 0$. La matrice augmentée est $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On lui applique Gauss.
$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_2 \leftarrow -L_2/4 \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
Les solutions sont donc les (x,y,z) tels que $z = 0, x = 2y$, soit $\{(2y,y,0)\} = \mathrm{Vect}\{(2,1,0)\}$. Une famille à un seul élément non-nul est libre donc $\{(2,1,0)\}$ forme une base de $\mathrm{Ker}\,(f - 2I_{\mathbb{R}^3})$.

On procède de même pour 1 et -2.
Pour 1, on a $(f - I_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (2y-2z, 3x-5y+2z, 3x-6y+3z)$.
$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftrightarrow L_2, \left(\begin{smallmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \left(\begin{smallmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2, \left(\begin{smallmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_2 \leftarrow L_2/2, \left(\begin{smallmatrix} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2, \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftarrow L_1/3, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
Les solutions sont $\{(z,z,z)\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$. $\{(1,1,1)\}$ est une base.

Pour -2, $(f + 2I_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (3x+2y-2z, 3x-2y+2z, 3x-6y+6z)$.
$\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$L_2 \leftarrow -L_2/4 \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$L_1 \leftarrow L_1/3 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$\mathrm{Ker}\,(f + 2I_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}\,\{(0,1,1)\}$. $\{(0,1,1)\}$ est une base.

4. Notons E_2, E_1, E_{-2} les trois espaces propres. Chacun est de dimension 1, d'après la question précédente. Puisque $1+1+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et puisque les espaces sont en somme directe, $E_2 \oplus E_1 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}^3$ (voir question 3. de l'exercice 1). Donc l'union d'une base de E_2, d'une base de E_1 et d'une base de E_{-2} est une base de $\mathbb{R}^3$.
Prenons $v_1 = (2,1,0), v_2 = (1,1,1)$ et $v_3 = (0,1,1)$. On note $\mathcal{P} = (v_1, v_2, v_3)$. C'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $f(v_1) = 2v_1, f(v_2) = v_2$ et $f(v_3) = -2v_3$, $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned} M - xI_n &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} - xPP^{-1} \\ &= (P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} - P.(xI_n))P^{-1} \\ &= P(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} - xI_n)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \det \left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} P^{-1} \right) \\ &= \det(P) \det(P^{-1}) \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} \\ &= \det(P) \det(P)^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - x \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1 - x) ... (\lambda_n - x) \end{aligned}$$

(On a utilisé la formule du déterminant pour les matrices triangulaires supérieures.)

3. Pour tout k :

$$\lambda_k I_n - M = P\left(\lambda_k I_n - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_k-\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k-\lambda_{k-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \lambda_k-\lambda_{k+1} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k-\lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 I_n - M)...(\lambda_n I_n - M)\\
&= P\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_1-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1-\lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2-\lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}...P\begin{pmatrix} \lambda_n-\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n-\lambda_{n-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_1-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1-\lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2-\lambda_n \end{pmatrix}...\begin{pmatrix} \lambda_n-\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n-\lambda_{n-1} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, lorsqu'on fait le produit de matrices diagonales, il suffit de multiplier entre eux les éléments de la diagonale. Comme, à chaque position de la diagonale, il y a un coefficient nul dans l'une des matrices, les produits des termes diagonaux sont tous nuls.

Exercice 4 :
$\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$. La famille $(I_n, A, A^2, ..., A^{n^2})$ contient $n^2+1 > n^2$ éléments. Elle est donc liée, ce qui signifie qu'il existe $a_0, a_1, ..., a_{n^2}$ des réels non tous nuls tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

Exercice 5 :
1. On sait que $E_1^f, ..., E_n^f$ sont en somme directe donc $\dim E_1^f + ... + \dim E_n^f = \dim(E_1^f \oplus ... \oplus E_n^f) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$.
Comme $\dim E_k^f \geq 1$ pour tout k (chaque E_k^f contient au moins un élément non-nul, v_k), on doit avoir $\dim E_1^f = ... = \dim E_n^f = 1$.
Puisque $v_k \in E_k^f$, $\mathrm{Vect}\,(v_k) \subset E_k^f$ et les deux ensembles sont égaux si et seulement si $\dim \mathrm{Vect}\,(v_k) = \dim E_k^f$. Or $\dim \mathrm{Vect}\,(v_k) = 1$ ($\{v_k\}$ est une famille libre et génératrice, c'est une base) et $\dim E_k^f = 1$. Donc $\mathrm{Vect}\,(v_k) = E_k^f$.
2. $f(g(v_k)) = (f \circ g)(v_k) = (g \circ f)(v_k) = g(f(v_k)) = g(\lambda_k v_k) = \lambda_k g(v_k)$. Donc $(f - \lambda_k I_{\mathbb{R}^n})(g(v_k)) = f(g(v_k)) - \lambda_k g(v_k) = 0$.
3. Puisque $E_k^f = \mathrm{Vect}\,(v_k)$ et $g(v_k) \in E_k^f$, c'est un multiple de v_k : il existe $\mu_k \in \mathbb{R}$ tel que $g(v_k) = \mu_k v_k$. Donc v_k est un vecteur propre de g pour la valeur propre μ_k.

4. $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (c'est une famille libre car les E_k^f sont en somme directe donc une base car elle contient n éléments). En définissant les μ_k comme à la question précédente :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Soit u nilpotente. Soit λ une valeur propre et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $u(x) = \lambda x$, $u^2(x) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$, ..., $u^d(x) = \lambda^d x$.
Puisque $u^d = 0$ mais $x \neq 0$, il faut avoir $\lambda^d = 0$ donc $\lambda = 0$.
Donc la seule valeur propre de u est 0. Donc si u est diagonalisable et si $\mathcal{P}$ est une base telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(u)$ est diagonale, tous les coefficients de la diagonale doivent être nuls : $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(u) = 0$.
Donc $u = 0$.
L'application nulle est la seule application nilpotente diagonalisable.

Exercice 7 :

1. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.
$f(e_1) = (2, 2, -1)$, $f(e_2) = (-1, -3, 3)$, $f(e_3) = (-1, -2, 2)$
Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On soustrait la deuxième colonne à la troisième puis on développe par rapport à la troisième colonne.

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_3\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 1+\lambda \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \quad = -(1+\lambda)((5-3\lambda) + (\lambda^2+\lambda-4)) \\
&= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\
&= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont les λ telles que $\chi_f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire 1 et -1.
3. a)

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda I_{\mathbb{R}^3}) &= \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f - \lambda I_{\mathbb{R}^3})\right) \\
&= \det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f) - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)
\end{aligned}$$

D'après la question 2., $\chi_f(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$. On doit donc avoir $(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)$.

Donc $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{-1, 1, 1\}$ et comme $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
b) Les coordonnées de $f(v_2)$ dans la base $\mathcal{P}$ sont $(0, \lambda_2, 0)$ (la deuxième colonne de $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f)$) donc $f(v_2) = 0.v_1 + \lambda_2.v_2 + 0.v_3 = \lambda_2 v_2 = v_2$. De même, $f(v_3) = v_3$.
Donc $v_2, v_3 \in \mathrm{Ker}\,(f - I_{\mathbb{R}^3}) = E_1$.
$\{v_2, v_3\}$ est une famille libre (car $\{v_1, v_2, v_3\}$ l'est donc, si $\alpha v_2 + \beta v_3 = 0$, on a aussi $0.v_1 + \alpha v_2 + \beta v_3 = 0$ et $0 = \alpha = \beta = 0$). Donc c'est une base de $\mathrm{Vect}\,(v_2, v_3)$ et $\dim \mathrm{Vect}\,(v_2, v_3) = 2$.
Puisque $v_2, v_3 \in E_1$, $\mathrm{Vect}\,(v_2, v_3) \subset E_1$ donc $2 = \dim \mathrm{Vect}\,(v_2, v_3) \leq \dim E_1$.
c) $(f - I_{\mathbb{R}^3})((x, y, z)) = (x - y - z, 2x - 4y - 2z, -x + 3y + z)$
On cherche les (x, y, z) tels que :

$$x - y - z = 0$$
$$2x - 4y - 2z = 0$$
$$-x + 3y + z = 0$$

La matrice augmentée associée à ce système est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On lui applique Gauss.
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow -L_2/4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Les solutions sont donc les (x, y, z) tels que $x - z = y = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\,(f - I_{\mathbb{R}^3}) = \{(z, 0, z) \text{ tq } z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\{(1, 0, 1)\}$. Puisque $\{(1, 0, 1)\}$ est libre (famille à un seul élément non-nul), c'est une base de E_1.
Puisque la base a un seul élément, $\dim E_1 = 1 < 2$. C'est en contradiction avec 3.b).
4. $(f - I_{\mathbb{R}^3})((x, y, z)) = (x - y - z, 2x - 4y - 2z, -x + 3y + z)$ donc :

$$\begin{aligned}(f - I_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - I_{\mathbb{R}^3}) &= ((x - y - z) - (2x - 4y - 2z) - (-x + 3y + z), \quad 2(x - y - z) - 4(2x - 4y - 2z) \\ &= (0, -4x + 8y + 4z, 4x - 8y - 4z)\end{aligned}$$

Cherchons une base du noyau. Le noyau est l'ensemble des (x, y, z) tels que $4x - 8y - 4z = 0$, c'est-à-dire $x = 2y + z$. Donc $\mathrm{Ker}\,(f - I_{\mathbb{R}^3})^2 = \{(2y + z, y, z) \text{ tq } y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
Donc $(2, 1, 0)$ est un élément de $\mathrm{Ker}\,(f - I_{\mathbb{R}^3})^2$. Puisqu'il n'est pas de la forme $(z, 0, z)$, il n'appartient pas à E_1 (on a vu en 3.c) que tous les éléments de E_1 étaient de la forme $(z, 0, z)$).
On prend donc $w_2 = (2, 1, 0)$.
5. On cherche donc w_3 tel que $f(w_3) + w_3 = 0$.
Puisque $(f + I_{\mathbb{R}^3})((x, y, z)) = (3x - y - z, 2x - 2y - 2z, -x + 3y + 3z)$, on cherche (x, y, z) tel que :

$$3x - y - z = 0$$
$$2x - 2y - 2z = 0$$
$$-x + 3y + 3z = 0$$

La matrice augmentée associée est $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. On lui applique l'algorithme de Gauss.
$L_1 \leftrightarrow L_3$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2/4$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow -L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Les solutions sont donc les (x, y, z) tels que $x = 0, y+z = 0$. Donc $\text{Ker}\,(f+I_{\mathbb{R}^3}) = \{(0, -z, z) \text{ tq } z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(0, -1, 1)\}$. Donc $w_3 = (0, -1, 1)$ est un choix possible.
6. $w_1 = (1, 0, 1)$, $w_2 = (2, 1, 0)$, $w_3 = (0, -1, 1)$.
$f(w_1) = w_1$
$f(w_2) = (3, 1, 1)$
On veut $f(w_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$. Il faut avoir :

$$(3, 1, 1) = (\alpha + 2\beta, \beta - \gamma, \alpha + \gamma)$$

On résoud et on trouve $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$.
Donc $f(w_2) = 1.w_1 + 1.w_2 + 0.w_3$
$f(w_3) = -w_3$
La matrice est donc $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
7. Soient u, g les applications linéaires dont les matrices dans la base $\mathcal{S}$ sont :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(On pourrait calculer leurs expressions dans la base canonique si on le souhaitait mais on va s'en dispenser ici.)
Les propriétés demandées sont bien vérifiées :
- u est nilpotente : $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u^2) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $u^2 = 0$.
- g est diagonalisable puisque, par définition, sa matrice dans la base $\mathcal{S}$ est diagonale.
- u et g commutent : $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u \circ g) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(g \circ u)$.
- $u + g = f$ car $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u + g) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(u) + \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(g) = \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(f)$.