TD : Algèbre

Exercice 1 :

1. Rappeler les axiomes que doivent vérifier les lois internes et externes d'un espace vectoriel.

2. On considère chacun des ensembles suivants, muni de son addition et de sa multiplication usuelles. Lesquels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

$$\mathbb{R} \qquad \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$$
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1\}$$
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } f \text{ est 1-périodique}\}$$
$$\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } t_1 + t_2 + ... + t_n = 0\}$$
$$\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } t_1 \times t_2 \times ... \times t_n = 0\}$$

Exercice 2 :

On pose $V_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } a+b+c+d = 0\}$ et $V_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & -a \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.

1. Montrer que V_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que V_2 est un sous-espace vectoriel de V_1.

Exercice 3 :

Montrer que $\{x \to \lambda \sin(x+\phi) \text{ tq } \lambda, \phi \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
[Indication : commencer par montrer que $\{x \to \lambda \sin(x+\phi) \text{ tq } \lambda, \phi \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \cos + \beta \sin \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.]

Exercice 4 :

1. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque. On note $+$ et $\times$ ses lois interne et externe :

$$+ : (v, v') \in E \times E \to v + v'$$
$$\times : (\alpha, v) \in \mathbb{C} \times E \to \alpha \times v$$

On définit une autre loi, $\times_{\mathbb{R}}$:

$$\times_{\mathbb{R}} : (\alpha, v) \in \mathbb{R} \times E \to \alpha \times v$$

Montrer que V, muni des lois $+$ et $\times_{\mathbb{R}}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la première question et le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est « naturellement » un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour des lois qu'on précisera.

Exercice 5 :

1. Calculer la matrice échelonnée réduite associée à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer si le système d'équations suivants a des solutions. S'il en a, calculer la ou les solutions :

$$\begin{cases} u - v - 3w + 2x + 2y = 0 \\ u - w - x - 2y = 0 \\ -2u - v + w + 4x + 7y = 0 \end{cases}$$

3. On note V l'ensemble des $(u, v, w, x, y) \in \mathbb{R}^5$ qui satisfont le système d'équations de la question précédente. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$.

4. On pose $e_1 = (2, 1, 1, 1, 0)$ et $e_2 = (3, 2, 1, 0, 1)$. Montrer que $V = \{\lambda e_1 + \mu e_2 \text{ tq } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix}$.

1. On note $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que B est inversible et que $B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -12 & -7 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $A = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} B^{-1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Calculer A^n.

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent si $AB = BA$. Le but de cet exercice est de trouver les matrices A qui commutent avec toutes les autres :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA$$

1. Montrer que si $A = \lambda I_n$, pour un certain réel λ, alors A commute avec toutes les autres matrices.

2. Dans cette question, on suppose que A est une matrice fixée, qui commute avec toutes les autres matrices. On note A_{ij} les éléments de A.
Pour tous $k, l \leq n$, on note $E^{(kl)}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la k-ème ligne et de la l-ème colonne, qui vaut 1.
a) Soit $k \leq n$. Calculer $E^{(kk)}A$ et $AE^{(kk)}$ en fonction des A_{ij}. En déduire que, si $l \neq k$, $A_{kl} = 0$.
b) Soient $k, l \leq n$ tels que $k \neq l$. Calculer $E^{(kl)}A$ et $AE^{(kl)}$. En déduire que $A_{kk} = A_{ll}$.
c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exercice 8 : [Difficile]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle permutations les applications bijectives $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$. Si σ est une permutation, on définit sa matrice de permutation associée, M_σ, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (M_\sigma)_{ij} &= 1 \text{ si } j = \sigma(i) \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

1. Soient B est une matrice de n lignes quelconque, σ une permutation et $k \leq n$. Calculer la k-ième ligne de $M_\sigma B$ en fonction des lignes de B.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On va montrer qu'il existe $T_1, T_2 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures et σ une permutation telles que $A = T_1 M_\sigma T_2$.
On commence par appliquer à A l'algorithme suivant, en n étapes :
À l'étape k, on note $i_k \leq n$ le plus grand entier, s'il existe, tel que :

$$A_{i_k,j} = 0 \text{ si } j < k \text{ et } A_{i_k,k} \neq 0$$

Si i_k existe, pour tout $l < i_k$, on applique à la matrice les transvections $L_l \leftarrow L_l - \frac{A_{l,k}}{A_{i_k,k}} L_{i_k}$.
On note $\tilde{A}$ la matrice obtenue à la fin de l'algorithme.
a) Tester l'algorithme sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
b) [La plus difficile] Démontrer par récurrence sur k qu'après l'étape k, pour tout $l \leq k$, la matrice contient au moins $n - l$ lignes dont les l premiers éléments sont nuls.
En déduire que, pour tout $l \leq n$, $\tilde{A}$ contient au moins l lignes dont les $n - l$ premiers éléments sont nuls.
c) On note $E_1, E_2, ..., E_T$ les matrices élémentaires associées aux transvections effectuées dans l'algorithme, et $M_A = E_T ... E_2 E_1$ leur produit, de sorte que $M_A A = \tilde{A}$. Montrer que M_A est triangulaire supérieure.
[Indication : montrer que chacune des E_s est triangulaire supérieure et utiliser l'exercice 5 du TD précédent.]
d) On définit $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ de la façon suivante : $\sigma(n)$ est le numéro d'une ligne de $\tilde{A}$ dont les $n - 1$ premiers éléments sont nuls. Pour tout $k < n$, $\sigma(k)$ est le numéro d'une ligne de $\tilde{A}$ dont les $k - 1$ premiers éléments sont nuls, tel que $\sigma(k) \neq \sigma(l)$ pour tout $l > k$. Montrer que cette définition est correcte et expliquer pourquoi σ est une permutation.
e) Montrer que $M_\sigma \tilde{A}$ est triangulaire supérieure.
f) On note $T_2 = M_\sigma \tilde{A}$. Montrer que $\tilde{A} = M_{\sigma^{-1}} T_2$.
g) Rappeler pourquoi M_A est inversible. On note $T_1 = M_A^{-1}$. Conclure, en utilisant le fait que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire supérieure (exercice 6 du premier TD).