Université Pierre et Marie Curie — Les 21 et 22 février 2013
LM125 — http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

1. Voir cours.

2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : l'addition de deux réels est associative, commutative et admet un élément neutre (0). De plus, chaque élément a un symétrique pour cette loi (le symétrique de x étant $-x$). La multiplication est associative et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1.x = x$. De plus, la multiplication étant, sur $\mathbb{R}$, distributive par rapport à l'addition, les deux axiomes de distributivité sont vérifiés.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : l'addition est associative, commutative et admet un élément neutre (la matrice nulle). De plus, chaque élément M a un symétrique pour l'addition, $-M$. La multiplication des scalaires vérifie $\alpha(\beta M) = (\alpha\beta)M$ et $1.M = M$. De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a vu dans le cours sur les matrices que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ et $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, il est inclus dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui est un espace vectoriel. Il est stable par addition : si $f_1 \to 0$ en $+\infty$ et $f_2 \to 0$, alors $f_1 + f_2 \to 0$. Il est aussi stable par multiplication par un réel : si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \to 0$ en $+\infty$, $\alpha f \to \alpha 0 = 0$ en $+\infty$. De plus, il est non-vide (il contient en particulier la fonction nulle). C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, en particulier, il s'agit d'un espace vectoriel.

$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1\}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, il n'est pas stable par addition : si $f_1 \to 1$ en $+\infty$ et $f_2 \to 1$, $f_1 + f_2 \to 2 \neq 1$.

$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } f \text{ est 1-périodique}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, il est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il est stable par addition : si f_1 et f_2 sont 1-périodiques, $f_1 + f_2$ l'est aussi (pour tout x, $(f_1+f_2)(x+1) = f_1(x+1)+f_2(x+1) = f_1(x)+f_2(x) = (f_1+f_2)(x)$). Il est aussi stable par multiplication par un réel : si f est 1-périodique et α est un réel, αf est 1-périodique (pour tout x, $(\alpha f)(x + 1) = \alpha f(x + 1) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$). Il est non-vide car il contient en particulier la fonction nulle. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; en particulier, c'est un espace vectoriel.

$\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } t_1 + ... + t_n = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet, il est inclus dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Il est stable par addition :

$$\text{Si } t_1 + ... + t_n = 0 \text{ et } t'_1 + ... + t'_n = 0$$
$$\text{alors } (t_1 + t'_1) + ... + (t_n + t'_n) = 0$$

Il est stable par multiplication par un réel :

$$\text{Si } t_1 + ... + t_n = 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\text{alors } (\alpha t_1) + ... + (\alpha t_n) = \alpha(t_1 + ... + t_n) = 0$$

Il est non-vide car il contient en particulier $(0, ..., 0)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Il s'agit donc aussi d'un espace vectoriel.
$\{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } t_1 \times ... \times t_n = 0\}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si $n \geq 2$. En effet, il contient $(0, 1, ..., 1)$ et $(1, 0, 1, ..., 1)$ mais pas leur somme, $(1, 1, 2, ..., 2)$. L'addition ne définit donc pas une loi « interne ».

Exercice 2 :

1. V_1 est inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
V_1 est non-vide : il contient par exemple la matrice nulle.
V_1 est stable par addition : si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V_1$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in V_1$, la somme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$ appartient aussi à V_1 car $(a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d') = (a+b+c+d)+(a'+b'+c'+d') = 0$.
V_1 est stable par multiplication par un réel : si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V_1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, le produit $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ appartient aussi à V_1 car $\alpha a + \alpha b + \alpha c + \alpha d = \alpha(a + b + c + d) = 0$.
V_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. V_2 est inclus dans V_1 : si $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in V_2$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in V_1$ puisque $a + b - b - a = 0$.
V_2 est non-vide : il contient par exemple la matrice nulle ($a = b = 0$).
V_2 est stable par addition : si $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in V_1$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & -a' \end{pmatrix} \in V_2$, la somme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ -b-b' & -a-a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a') & (b+b') \\ -(b+b') & -(a+a') \end{pmatrix}$ appartient aussi à V_2.
V_2 est stable par multiplication par un réel : si $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in V_2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, le produit $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a) & (\alpha b) \\ (\alpha b) & -(\alpha a) \end{pmatrix}$ appartient aussi à V_2.
V_2 est donc un sous-espace vectoriel de V_1.

Exercice 3 :

Notons $V_1 = \{x \to \lambda \sin(x + \phi) \text{ tq } \lambda, \phi \in \mathbb{R}\}$ et $V_2 = \{\alpha \cos + \beta \sin \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.
Nous allons d'abord démontrer que $V_1 = V_2$. Nous montrerons ensuite que V_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce qui démontrera que V_1 est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour montrer que $V_1 = V_2$, il faut montrer que $V_1 \subset V_2$ et $V_2 \subset V_1$.
- $V_1 \subset V_2$: Soit $f \in V_1$. On va montrer que $f \in V_2$. Soient $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \lambda \sin(x + \phi)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \sin(x + \phi) = \lambda \sin(\phi) \cos(x) + \lambda \cos(\phi) \sin(x)$ donc la fonction $f : x \to \lambda \sin(x + \phi)$ est égale à la fonction $(\lambda \sin(\phi)) \cos + (\lambda \cos(\phi)) \sin$. Elle appartient donc à V_2.
- $V_2 \subset V_1$: Soit $f \in V_2$. On va montrer que $f \in V_1$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f = \alpha \cos + \beta \sin$. On pose $\lambda = \sqrt(\alpha^2 + \beta^2), \alpha' = \alpha/\lambda, \beta' = \beta/\lambda$. Alors :

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = (\alpha^2 + \beta^2)/\lambda^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

Le nombre complexe $c = \beta' + i\alpha'$ est de module 1, puisque $\alpha'^2 + \beta'^2 = 1$. Il s'écrit donc sous la forme $e^{i\theta}$ pour un certain réel $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $\beta' + i\alpha' = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, ce qui implique que $\beta' = \cos(\theta)$ et $\alpha' = \sin(\theta)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)=\lambda\alpha'\cos(x)+\lambda\beta'\sin(x)=\lambda(\sin(\theta)\cos(x)+\cos(\theta)\sin(x))=\lambda\sin(x+\theta)$$

Donc la fonction $f=\alpha\cos+\beta\sin$ est égale à la fonction $x\to\lambda\sin(x+\theta)$, qui appartient à V_1. Donc f appartient à V_1.

On a montré que $V_1=V_2$. On termine l'exercice en montrant que V_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- V_2 est non-vide : il contient la fonction nulle ($\alpha=\beta=0$).
- V_2 est stable par addition : si $f_1=\alpha\cos+\beta\sin$ et $f_2=\alpha'\cos+\beta'\sin$ sont deux éléments de V_2, alors la fonction f_1+f_2 est aussi un élément de V_2 puisque $f_1+f_2=(\alpha+\alpha')\cos+(\beta+\beta')\sin$.
- V_2 est stable par multiplication par un réel : si $f=\alpha\cos+\beta\sin$ est un élément de V_2 et λ est un réel quelconque, $\lambda f=(\lambda\alpha)\cos+(\lambda\beta)\sin$ est aussi un élément de V_2.

Exercice 4 :

1. Il faut montrer que les huit axiomes des espace vectoriels sont vérifiés.
Les quatre axiomes relatifs à la loi interne (associativité, commutativité, existence d'un élément neutre, existence d'un symétrique) sont vérifiés : en effet, $+$ vérifie ces quatre axiomes puisque V, muni des lois $+$ et $\times$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $+$ doit vérifier les quatre axiomes.
Démontrons que les deux axiomes relatifs à la loi externe sont vérifiés. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ quelconques et $v\in V$. Il faut montrer que $(\lambda\mu)\times_{\mathbb{R}} v=\lambda\times_{\mathbb{R}}(\mu\times_{\mathbb{R}} v)$. Cette égalité est vraie si λ et μ appartiennent à $\mathbb{C}$ car :

$$(\lambda\mu)\times_{\mathbb{R}} v=(\lambda\mu)\times v=\lambda\times(\mu\times v)=\lambda\times_{\mathbb{R}}(\mu\times_{\mathbb{R}} v)$$

L'égalité du milieu est vraie car $\times$ est la loi externe du $\mathbb{C}$-espace vectoriel V donc vérifie les deux axiomes relatifs à la loi externe.
Montrons le deuxième axiome, c'est-à-dire montrons que, pour tout $v\in V$, $1\times_{\mathbb{R}} v=v$. Par définition, $1\times_{\mathbb{R}} v=1\times v$ et, puisque $\times$ vérifie les axiomes relatifs à la loi externe d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $1\times v=v$, donc $1\times_{\mathbb{R}} v=1\times v$.
Démontrons que les deux axiomes de double distributivité sont vérifiés. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $u,v\in V$. Il faut montrer que $(\lambda+\mu)\times_{\mathbb{R}} u=\lambda\times_{\mathbb{R}} u+\mu\times_{\mathbb{R}} u$ et que $\lambda\times_{\mathbb{R}}(u+v)=\lambda\times_{\mathbb{R}} u+\lambda\times_{\mathbb{R}} v$. Ces deux égalités sont vraies car :

$$(\lambda+\mu)\times_{\mathbb{R}} u=(\lambda+\mu)\times u=\lambda\times u+\mu\times u=\lambda\times_{\mathbb{R}} u+\mu\times_{\mathbb{R}} u$$
$$\lambda\times_{\mathbb{R}}(u+v)=\lambda\times(u+v)=\lambda\times u+\lambda\times v=\lambda\times_{\mathbb{R}} u+\lambda\times_{\mathbb{R}} v$$

2. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\times$ usuelles sur les matrices : $+$ est la somme de deux matrices et $\times$ est la multiplication d'un matrice par un scalaire.
Si on définit la loi $\times_{\mathbb{R}}$ comme à la première question, cette loi est la multiplication d'une matrice complexe par un scalaire réel : $\lambda\times_{\mathbb{R}} A$ est la matrice dont le coefficient (i,j) est λA_{ij}.
D'après la première question, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois $+$ et $\times_{\mathbb{R}}$.

Exercice 5 :

1. On utilise l'algorithme de Gauss (sans noter les matrices élémentaires à chaque étape puisqu'on n'en a pas besoin dans la suite).

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 8 & 11 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice échelonnée réduite associée est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Notons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $U_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après le cours, il existe $M_{\tilde{A}}$ une matrice inversible telle que $M_{\tilde{A}}A = U_{\tilde{A}}$.

De la même façon que dans l'exercice 3 du précédent TD, (u, v, w, x, y) est solution du système d'équations si et seulement si $\tilde{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Et puisque $M_{\tilde{A}}$ est inversible, $\tilde{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ si et seulement si $U_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = M_{\tilde{A}}\tilde{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

La matrice $U_{\tilde{A}}$ ne comporte pas de ligne dont tous les éléments seraient nuls sauf le dernier. Il existe donc une solution. Les variables u, v, w sont essentielles (car il y a un pivot dans les colonnes $1, 2$ et 3 de $U_{\tilde{A}}$) mais les variables x et y sont libres (car il n'y a pas de pivot dans les colonnes 4 et 5). D'après le cours, il y a donc une infinité de solutions au système.

Déterminons les (u, v, w, x, y) tels que $U_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = 0$:

$$U_{\tilde{A}}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2x-3y \\ v-x-2y \\ w-x-y \end{pmatrix}$$

Pour que (u, v, w, x, y) soit solution du système, il faut et il suffit d'avoir :

$$u = 2x + 3y \qquad v = x + 2y \qquad w = x + y$$

Les solutions sont donc tous les quintuplets de la forme $(2x+3y, x+2y, x+y, x, y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

3. V est non-vide car il contient $(0, 0, 0, 0, 0)$.

V est stable par addition : soient a et b deux éléments de V ; on va montrer que $a+b$ appartient aussi à V. D'après la question précédente, il existe x, y, x', y' tels que $a = (2x + 3y, x + 2y, x + y, x, y)$ et $b = (2x' + 3y', x' + 2y', x' + y', x', y')$. Alors $a+b = (2(x+x')+3(y+y'), (x+x')+2(y+y'), (x + x') + (y + y'), (x + x'), (y + y'))$. Il est donc de la forme trouvée au 2. (pour $x = x + x'$ et $y = y + y'$) et est une solution de l'équation, donc un élément de V.

V est stable par multiplication par un scalaire : soit a un élément de V et $\lambda \in \mathbb{R}$; on va montrer que λa appartient à V. D'après la question précédente, il existe x, y tels que $a = (2x+3y, x+2y, x+y, x, y)$. Alors $\lambda a = (2(\lambda x)+3(\lambda y), (\lambda x)+2(\lambda y), (\lambda x)+(\lambda y), (\lambda x), (\lambda y))$. Il est donc de la forme trouvée au 2. (pour $x = \lambda x$ et $y = \lambda y$) et est une solution de l'équation, donc un élément de V.

4. On note $V' = \{\lambda e_1 + \mu e_2 \text{ tq } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. On veut montrer que $V = V'$. Il faut donc montrer que $V \subset V'$ et $V' \subset V$.
$V \subset V'$: si $(u, v, w, x, y) \in V$, alors, d'après la question 2., $(u, v, w, x, y) = (2x+3y, x+2y, x+y, x, y) = (2x, x, x, x, 0) + (3y, 2y, y, 0, y) = x(2,1,1,1,0) + y(3,2,1,0,1) = xe_1 + ye_2$ donc $(u, v, w, x, y) \in V'$.
$V' \subset V$: si $\lambda e_1 + \mu e_2$ est un élément quelconque de V', alors $\lambda e_1 + \mu e_2 = (2\lambda+3\mu, \lambda+2\mu, \lambda+\mu, \lambda, \mu)$ donc est de la forme trouvée au 2., pour $x = \lambda$ et $y = \mu$. Donc $\lambda e_1 + \mu e_2 \in V$.

Exercice 6 :
1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -12 & -7 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -4 & -12 & -7 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -4 & -12 & -8 \end{pmatrix} = A$
3. On utilise le fait que $A^n = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n B^{-1}$. On utilise également le fait qu'élever une matrice diagonale à la puissance n revient à élever à la puissance n chacun des coefficients situés sur la diagonale : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ (si $n \geq 1$ seulement, car $0^0 = 1$).
Donc :

$$\begin{aligned} A^n = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(-1)^n & -3.(-1)^n & -2.(-1)^n \\ 2^n & 2.2^n & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2.(-1)^n+3.2^n & 6.(-1)^n+6.2^n & 4.(-1)^n+3.2^n \\ -3.(-1)^n-2^n & -9.(-1)^n-2.2^n & -6.(-1)^n-2^n \\ 4.(-1)^n & 12.(-1)^n & 8.(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 7 :
1. Il faut montrer que, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice quelconque, alors A commute avec B. Soit donc B quelconque.

$$AB = \lambda I_n \times B = \lambda B = B \times \lambda = B \times I_n \times \lambda = B \times (\lambda I_n) = BA$$

Donc B commute bien avec A.
2. a) $(E^{(kk)}A)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} E_{il}^{(kk)} A_{lj}$
Par définition, $E_{il}^{(kk)} = 0$ si $i \neq k$ ou $l \neq k$ et $E_{il}^{(kk)} = 1$ si $i = l = k$. Donc si $i \neq k$, tous les $E_{il}^{(kk)} A_{lj}$ sont nuls et $(E^{kk}A)_{ij} = 0$. Si $i = k$, tous les $E_{il}^{(kk)} A_{lj}$ sont nuls sauf pour $l = k$ donc $(E^{(kk)}A)_{ij} = E_{kk}^{(kk)} A_{kj} = A_{kj} = A_{ij}$.
Donc $(E^{(kk)}A)_{ij} = 0$ si $i \neq k$ et $(E^{(kk)}A)_{ij} = A_{ij}$ si $i = k$.

$$E^{(kk)}A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } k \\ \\ \\ \end{array}$$

Le calcul de $(AE^{(kk)})_{ij}$ est similaire. On trouve cette fois que $(AE^{(kk)})_{ij} = 0$ si $j \neq k$ et $(AE^{(kk)})_{ij} = A_{ij}$ si $j = k$.

$$AE^{(kk)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & A_{1k} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & A_{nk} & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{colonne } k \end{array}$$

Puisque A commute avec $E^{(kk)}$, $E^{(kk)}A = AE^{(kk)}$. Soit l tel que $l \neq k$. Alors $(AE^{(kk)})_{kl} = 0$, puisqu'on a vu que $(AE^{(kk)})_{ij} = 0$ si $j \neq k$. De plus, $(E^{(kk)})_{kl} = A_{kl}$. Donc, comme $(AE^{(kk)})_{kl} = (E^{(kk)}A)_{kl}$, $A_{kl} = 0$.

b) Les calculs sont similaires à ceux effectués à la question a). On trouve les résultats suivants.
$(E^{(kl)}A)_{ij} = 0$ si $i \neq k$ et $(E^{(kl)}A)_{ij} = A_{lj}$ si $i = k$.
$(AE^{(kl)})_{ij} = 0$ si $j \neq l$ et $(AE^{(kl)})_{ij} = A_{ik}$ si $j = l$.
Puisque A commute avec $E^{(kl)}$, $(E^{(kl)}A)_{kl} = (AE^{(kl)})_{kl}$. Or $(E^{(kl)}A)_{kl} = A_{ll}$ et $(AE^{(kl)})_{kl} = A_{kk}$. Donc $A_{kk} = A_{ll}$.

c) D'après la question a), la matrice A est diagonale : si k est un entier et $l \neq k$, alors $A_{kl} = 0$. D'après la question b), tous les coefficients sur la diagonale sont égaux : si $k \neq l$, $A_{kk} = A_{ll}$. Si on pose $\lambda = A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}$, on a donc $A = \lambda I_n$.

Exercice 8 :

1. $(M_\sigma B)_{kj} = \sum_{l=1}^{n} (M_\sigma)_{kl} B_{lj} = B_{\sigma(k)j}$ car $(M_\sigma)_{kl} = 0$ si $l \neq \sigma(k)$ et 1 si $l = \sigma(k)$.
La k-ième ligne de $(M_\sigma B)$ est donc la $\sigma(k)$-ième ligne de B.

2. a) Étape 1 : $i_1 = 2$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Étape 2 : $i_2 = 3$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Étape 3 : $i_3 = 1$
Étape 4 : $i_4 = 4$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + L_4$, $\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&1&1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$, $\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$
b) Pour $k=0$, c'est vrai : au début de l'algorithme, il y a n lignes, qui ont toutes leurs zéro premiers éléments nuls.
Si c'est vrai pour k, démontrons-le pour $k+1$. Soit $l \leq k+1$ quelconque. On va distinguer les cas $l \leq k$ et $l = k+1$.
Si $l \leq k$: Soient $I_1, ..., I_s$ les indices des lignes dont les l premiers éléments sont nuls après la k-ième étape. D'après l'hypothèse de récurrence, il y en a au moins $n-l$. L'indice i_{k+1}, s'il existe, fait partie des I_r puisque $A_{ik+1,j} = 0$ si $j < k+1$, donc en particulier si $j \leq l$. Après la $k+1$-ème étape, la ligne d'indice I_r vaut soit L_{I_r} (si $r \geq i_{k+1}$, elle n'est pas modifiée) soit $L_{I_r} - \frac{A_{I_r,k+1}}{A_{i_{k+1},k+1}} L_{i_{k+1}}$ Puisque les lignes L_{I_r} et $L_{i_{k+1}}$ ont toutes les deux leurs l premiers éléments nuls, la nouvelle ligne d'indice I_r a aussi ses l premiers éléments nuls. En d'autres termes, si une ligne a ses l premiers éléments nuls avant la $k+1$-ème étape, elle a toujours ses l premiers éléments nuls après l'étape. Donc il y a toujours au moins $n-l$ lignes dont les l premiers éléments sont nuls.
Si $l = k+1$: soient $I_1, ..., I_s$ les indices des lignes dont les k premiers éléments sont nuls après la k-ème étape. Il y en a au moins $n-k$, par hypothèse de récurrence.
Si i_{k+1} n'existe pas, chacune des lignes d'indice I_r a ses $(k+1)$ premiers éléments nuls (sinon, I_r vérifierait $A_{I_r,j} = 0$ si $j < k$ et $A_{I_r,k} \neq 0$ donc i_{k+1} existerait). Dans ce cas, la $(k+1)$-ème étape ne modifie pas la matrice donc les lignes d'indice I_r auront encore leurs $(k+1)$ premiers éléments nuls après la $(k+1)$-ème étape. Comme elles sont au moins $n-k > n-(k+1)$, l'hypothèse de récurrence sera vérifiée.
On suppose donc maintenant que i_{k+1} existe.
Pour tout r tel que $I_r > i_{k+1}$, la ligne I_r a ses $k+1$ premiers éléments nuls. En effet, sinon, puisque elle a ses k premiers éléments nuls, elle aurait son $k+1$-ème élément nul. I_r serait alors un entier plus grand que i_{k+1} vérifiant :

$$A_{I_r,j} = 0 \text{ si } j < k+1 \text{ et } A_{I_r,k+1} \neq 0$$

C'est en contradiction avec la définition de i_{k+1}, qui est le plus grand entier à vérifier cette propriété.
Pour tout r tel que $I_r > i_{k+1}$, la ligne I_r n'est pas modifiée pendant la $k+1$-ème étape (seules sont modifiées les lignes d'indice $l < i_{k+1}$). Les lignes d'indice $I_R > i_{k+1}$ ont donc toujours leurs $k+1$ premiers éléments nuls après la $(k+1)$-ème étape.
Pour tout r tel que $I_r < i_{k+1}$, la ligne I_r a ses $(k+1)$ premiers coefficients nuls après la $(k+1)$-ème étape. En effet, après la $(k+1)$-ème étape, la ligne I_r vaut $L_{I_r} - \frac{A_{I_r,k+1}}{A_{i_{k+1},k}} L_{i_{k+1}}$. Comme les lignes L_{I_r} et $L_{i_{k+1}}$ ont leurs k premiers coefficients nuls, la nouvelle ligne d'indice I_r aura aussi ses k premiers coefficients nuls. De plus, la nouvelle ligne d'indice I_r aura pour $(k+1)$-ème

élément $A_{I_r,k+1} - \frac{A_{I_r,k+1}}{A_{i_{k+1},k}} A_{i_{k+1},k+1} = 0$. Cette nouvelle ligne aura donc ses $(k+1)$ premiers éléments nuls.
Après la $(k+1)$-ème étape, toutes les lignes d'indice I_r auront donc leurs $k+1$ premiers éléments nuls, sauf si $I_r = i_{k+1}$. Le nombre de lignes dont les $k+1$ premiers éléments seront nuls sera donc au moins $(n-k)-1 = n-(k+1)$, ce qui démontre l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$.

La matrice $\tilde{A}$ est celle obtenue après l'étape n. Elle vérifie donc l'hypothèse au rang n : pour tout $l \leq n$, $\tilde{A}$ contient au moins $n-(n-l) = l$ lignes dont les $n-l$ premiers éléments sont nuls.

c) On va montrer que chaque matrice E_s est triangulaire supérieure. Le produit M_A sera alors aussi une matrice triangulaire supérieure, puisque le produit de plusieurs matrices triangulaires supérieures est aussi une matrice triangulaire supérieure (exercice 5 du précédent TD).
Soit donc $s \in \{1,...,T\}$. La matrice E_s est associée à une transvection de la forme $L_l \leftarrow L_l - \alpha L_{i_k}$, avec $l < i_k$ et $\alpha = \frac{A_{l,k}}{A_{i_k,k}}$.
Les coefficients de E_s sont donc tous nuls, sauf les coefficients sur la diagonale de E_s, qui valent 1, et le coefficient $(E_s)_{l,i_k}$, qui vaut $-\alpha$. Puisque $l < i_k$, tous ces coefficients non nuls sont au-dessus de la diagonale donc E_s est triangulaire supérieure.

d) La définition est correcte : d'après la question b), pour tout $l \leq n$, $\tilde{A}$ contient au moins l lignes dont les $n-l$ premiers éléments sont nuls. Il y a donc au moins une ligne dont les $n-1$ premiers éléments sont nuls : $\sigma(n)$ est bien définie. Ensuite, pour tout $k < n$, il y a au moins $n-(k-1) = n-k+1$ lignes de $\tilde{A}$ dont les $k-1$ premiers éléments sont nuls. Puisque l'ensemble $\{\sigma(k+1),...,\sigma(n)\}$ contient seulement $n-k$ éléments, il existe au moins une ligne dont les $k-1$ premiers éléments sont nuls mais dont l'indice ne fait pas partie de l'ensemble $\{\sigma(k+1),...,\sigma(n)\}$. On peut donc choisir pour $\sigma(k)$ l'indice de cette ligne : $\sigma(k)$ est bien définie.
La fonction $\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ est injective puisque, pour tout k et tout $l > k$, $\sigma(k) \neq \sigma(l)$, ce qui implique (quitte à échanger k et l) que $\sigma(k) \neq \sigma(l)$ pour tous k,l tels que $k \neq l$.
L'ensemble $\{\sigma(1),...,\sigma(n)\}$ contient n éléments, puisque σ est injective donc les $\sigma(k)$ sont tous différents. Puisque cet ensemble est inclus dans $\{1,...,n\}$, qui contient aussi n éléments, il lui est égal : $\{\sigma(1),...,\sigma(n)\} = \{1,...,n\}$. Donc σ est surjective.
La fonction σ est bijective, c'est donc une permutation.

e) La k-ème ligne de $M_\sigma \tilde{A}$ est la $\sigma(k)$-ème ligne de $\tilde{A}$. Par définition de $\sigma(k)$, ses $k-1$ premiers éléments sont nuls.
Donc, pour tout $l \leq n$, les $l-1$ premiers éléments de la l-ème ligne de $M_\sigma \tilde{A}$ sont nuls, ce qui veut dire que $(M_\sigma \tilde{A})_{ls} = 0$ si $s < l$. La matrice $M_\sigma \tilde{A}$ est donc triangulaire supérieure.

f) $M_{\sigma^{-1}} M_\sigma = I_n$
En effet, $(M_{\sigma^{-1}} M_\sigma)_{ij} = \sum_l (M_{\sigma^{-1}})_{il} (M_\sigma)_{lj}$. Pour que $(M_{\sigma^{-1}})_{il} (M_\sigma)_{lj}$ soit non-nul, il faut que $l = \sigma^{-1}(i)$ et $j = \sigma(l)$. On doit donc avoir $j = \sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$. La matrice $M_{\sigma^{-1}} M_\sigma$ est donc diagonale. De plus, si $i = j$, il existe un seul l tel que $(M_{\sigma^{-1}})_{il} (M_\sigma)_{lj} \neq 0$ (c'est $l = \sigma - 1(i)$). Dans ce cas, $(M_{\sigma^{-1}})_{il} (M_\sigma)_{lj} = 1$. Chacun des coefficients sur la diagonale de $M_{\sigma^{-1}} M_\sigma$ vaut donc 1.
On a donc $M_{\sigma^{-1}} T_2 = M_{\sigma^{-1}} M_\sigma \tilde{A} = \tilde{A}$.

g) M_A est un produit de matrices inversibles. Elle est donc inversible.
$T_1 M_{\sigma^{-1}} T_2 = T_1 \tilde{A} = M_A^{-1} \tilde{A} = M_A^{-1} M_A A = A$
Les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et $M_{\sigma^{-1}}$ est une matrice de permutation.