TD : Algèbre

Exercice 1 :

Dans chacun des trois cas suivants, dire si E_1 et E_2 sont supplémentaires.
[Remarque : on pourra admettre que les familles génératrices données pour E_1 et E_2 en constituent des bases.]

1. $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$, $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

2. $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$, $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3. $E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4&1\\-3&6\end{pmatrix}\right\}$, $E_2 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&-4\\-2&-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\-7&-5\end{pmatrix}\right\}$ supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de type fini. On note n la dimension de E.
Si H est un sous-espace vectoriel de E, on dit que H est un *hyperplan* si $\dim H = n-1$.

1. Soient V et H deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que H est un hyperplan.
a) Montrer que $\dim(V \cap H) = \dim(V) + \dim(H) - \dim(V+H)$.
b) Montrer que $\dim(V \cap H) \geq \dim(V) - 1$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soient $H_1, ..., H_k$ des hyperplans de E. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_k) \geq n-k$.

3. Soient $f_1, f_2, ..., f_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $s \leq k$, $f_s \neq 0$.
a) Montrer que, pour tout $s \leq k$, $\dim(\text{Im } f_s) > 0$. En déduire que $\dim(\text{Im } f_s) = 1$.
b) À l'aide du théorème du rang, montrer que $\text{Ker } f_s$ est un hyperplan.
c) À l'aide de la question 2., montrer que, si $k < n$, il existe $x \neq 0$ tel que $f_1(x) = f_2(x) = ... = 0$.

4. Dans cette question, on démontre d'une façon un peu différente le résultat précédent. Soient toujours $f_1, ..., f_k \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
a) Soit :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & E & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ & x & \rightarrow & (f_1(x), ..., f_k(x)) \end{array}$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.
b) En utilisant le théorème du rang, montrer que $\dim(\text{Ker } \phi) \geq n-k$.
c) Retrouver le résultat de la question 3.c).

Exercice 3 :

Soit $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (-x_2 + x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2)$.
On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

2. Soient $v_1 = (1,0,1), v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,0,2)$.
a) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, qu'on note P.
c) Calculer P^{-1}.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.