Université Pierre et Marie Curie
LM125
Le 21 mars 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 1 :

Dans chaque question, on utilisera la propriété selon laquelle deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si, en considérant l'union d'une base du premier espace et d'une base du deuxième, on obtient une base de l'espace total.

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de E_1 et $\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de E_2. Les espaces E_1 et E_2 sont donc supplémentaires si et seulement si $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Une famille à 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ est donc une base si et seulement si elle est libre (propriété du cours). La famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ est donc une base si et seulement si c'est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons donc si cette famille est libre. Il faut savoir s'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ qui ne soient pas tous les trois nuls tels que :

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_3\\2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3\\\lambda_1-3\lambda_2+3\lambda_3\end{pmatrix}$$

Résolvons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\lambda_1+2\lambda_3&=0\\2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3&=0\\\lambda_1-3\lambda_2+3\lambda_3&=0\end{aligned}$$

La matrice augmentée associée est $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\2&1&4&0\\1&-3&3&0\end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss :

$L_2\leftarrow L_2-2L_1$, $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\1&-3&3&0\end{pmatrix}$

$L_3\leftarrow L_3-L_1$, $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&0\end{pmatrix}$

$L_3\leftarrow L_3+3L_1$, $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$L_1\leftarrow L_1-2L_3$, $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

Toutes les variables sont essentielles. La solution du système est donc unique. Puisque $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ est solution, c'est la seule solution et la famille est libre. E_1 et E_2 sont donc supplémentaires.

2. $\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de E_1 et $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de E_2. Les espaces E_1 et E_2 sont donc supplémentaires si et seulement si $\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et puisque cette famille a 3 éléments, c'est une base si et seulement si elle est libre. Cherchons donc à déterminer si la famille est libre. Il faut déterminer s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous les trois nuls tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Résolvons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ici, ce n'est vraiment pas la peine de considérer la matrice augmentée : d'après la première équation, $\lambda_2 = \lambda_3$ et, d'après la deuxième, $\lambda_1 = 3\lambda_2$. En remplaçant dans la troisième, on obtient $\lambda_2 = 0$. On a donc aussi $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.
La seule solution du système est donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre. E_1 et E_2 sont supplémentaires.
3. Puisque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_1 et $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_2, E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4. Puisque la famille qu'on considère a quatre éléments, c'est une base si et seulement si elle est libre. Il faut donc savoir s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous les quatre nuls tels que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 - 4\lambda_3 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 - 7\lambda_4 & \lambda_1 + 6\lambda_2 - 4\lambda_3 - 5\lambda_4 \end{pmatrix}$$

Résolvons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 - 7\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 - 4\lambda_3 - 5\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

La matrice augmentée associée est $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3/3$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Il y a une variable libre, la quatrième, donc le système admet une infinité de solutions. La famille n'est donc pas libre et les espaces vectoriels ne sont pas en somme directe.

Exercice 2 :
1. a) Une propriété du cours dit que $\dim(V + H) = \dim(V) + \dim(H) - \dim(V \cap H)$.
b) $\dim(H) = n - 1$ et $\dim(V + H) \leq n$ car $V + H \subset E$ donc $\dim(V + H) \leq \dim(E) = n$. Donc :

$$\dim(V \cap H) = \dim(V) + n - 1 - \dim(V + H) \geq \dim(V) + n - 1 - n = \dim(V) - 1$$

2. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \dim(H_1 \cap ... \cap H_k) &\geq \dim(H_1 \cap ... \cap H_{k-1}) - 1 \\ &\geq \dim(H_1 \cap ... \cap H_{k-2}) - 2 \\ &\geq ... \qquad \geq \dim(H_1) - (k-1) = n - k \end{aligned}$$

3. a) Si $\dim(\mathrm{Im}\, f_s) = 0$, cela signifie que $\mathrm{Im}\, f_s = \{0\}$. Cela signifie donc que, pour tout $x \in E$, $f_s(x) = 0$ (car $f_s(x) \in \mathrm{Im}\, f_s = \{0\}$). Donc f_s est la fonction nulle. Comme on a supposé que ce n'était pas le cas, $\dim(\mathrm{Im}\, f_s) \neq 0$, donc $\dim(\mathrm{Im}\, f_s) > 0$.
De plus, $\mathrm{Im}\, f_s \subset \mathbb{R}$ donc $\dim(\mathrm{Im}\, f_s) \leq \dim \mathbb{R} = 1$. Puisque $0 < \dim(\mathrm{Im}\, f_s) \leq 1$, $\dim(\mathrm{Im}\, f_s) = 1$.
b) Le théorème du rang dit que $\dim(\mathrm{Ker}\, f_s) + \dim(\mathrm{Im}\, f_s) = \dim E = n$. Donc $\dim(\mathrm{Ker}\, f_s) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f_s) = n - 1$.
c) D'après la question 2., $\dim((\mathrm{Ker}\, f_1) \cap ... \cap (\mathrm{Ker}\, f_k)) \geq n - k$. Si $k < n$, on a alors $\dim((\mathrm{Ker}\, f_1) \cap ... \cap (\mathrm{Ker}\, f_k)) > 0$. Cela signifie que l'intersection $(\mathrm{Ker}\, f_1) \cap ... \cap (\mathrm{Ker}\, f_k)$ est différente de $\{0\}$. Il existe donc $x \in (\mathrm{Ker}\, f_1) \cap ... \cap (\mathrm{Ker}\, f_k)$ tel que $x \neq 0$. Pour tout $s \leq k$, puisque $x \in \mathrm{Ker}\, f_k$, $f_k(x) = 0$.
4. a) Il faut montrer que ϕ respecte la combinaison linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On va montrer que $\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(y)$.

$$
\begin{aligned}
\phi(\lambda x + \mu y) &= (f_1(\lambda x + \mu y), ..., f_k(\lambda x + \mu y)) \\
&= (\lambda f_1(x) + \mu f_1(y), ..., \lambda f_k(x) + \mu f_k(y)) \\
&= (\lambda f_1(x), ..., \lambda f_k(x)) + (\mu f_1(y), ..., \mu f_k(y)) \\
&= \lambda(f_1(x), ..., f_k(x)) + \mu(f_1(y), ..., f_k(y)) \\
&= \lambda\phi(x) + \mu\phi(y)
\end{aligned}
$$

b) D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}\phi) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}\phi)$.
Puisque $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{R}^k$, $\dim(\operatorname{Im}\phi) \leq \dim \mathbb{R}^k = k$ donc $\dim(\operatorname{Ker}\phi) \geq \dim(E) - k = n - k$.
c) Si $k < n$, $\dim(\operatorname{Ker}\phi) > 0$ donc, comme en 3.c), il existe $x \neq 0$ tel que $x \in \operatorname{Ker}\phi$. Puisque $x \in \operatorname{Ker}\phi$, $\phi(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$(f_1(x), ..., f_k(x)) = (0, ..., 0)$$

Donc pour tout $s \leq k$, $f_s(x) = 0$.

Exercice 3 :
1. $f(e_1) = (0, 1, -1) = 0.e_1 + 1.e_2 + (-1).e_3$ donc la première colonne de la matrice demandée sera $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$f(e_2) = (-1, 0, 1) = (-1).e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$ donc la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$f(e_3) = (1, -1, 0) = 1.e_1 + (-1).e_2 + 0.e_3$ donc la troisième colonne sera $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. a) Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et que la famille $\mathcal{B}$ contient 3 éléments, il suffit de montrer que la famille est libre.
Supposons que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Il faut montrer qu'alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
$(0, 0, 0) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)$
En regardant la deuxième coordonnée, on obtient $\lambda_2 = 0$. On doit alors avoir $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$. En faisant la différence des deux, on trouve $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.
La famille est donc libre. C'est bien une base.
b) $v_1 = 1.e_1 + 0.e_2 + 1.e_3$ donc la première colonne de la matrice sera $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$v_2 = 1.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$ donc la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$v_3 = 1.e_1 + 0.e_2 + 2.e_3$ donc la troisième colonne sera $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
c) On utilise l'algorithme de Gauss.
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$