TD : Algèbre

Exercice 1 :

Soit $E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } a - b - c - 2d = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ en est une base.

2. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie de la manière suivante :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \qquad f((a, b, c, d)) = (a - 6d, c - d, -b - 2c + d, a - 4d)$$

Montrer que, pour tout $(a, b, c, d) \in E$, $f((a, b, c, d)) \in E$.

3. Soit $g : E \to E$ l'application linéaire telle que, pour tout $(a, b, c, d) \in E$, $g((a, b, c, d)) = f((a, b, c, d))$. Montrer que A, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$, vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer le polynôme caractéristique de A, $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$ et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et -2.

5. Donner une base des espaces propres associés aux valeurs propres trouvées en 4.

6. Trouver une base $\mathcal{P}$ de E dans laquelle la matrice de g est diagonale, de la forme $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

7. Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{P}$.

8. En utilisant la relation liant A, D, P, P^{-1}, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ quelconque. On pose $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 1 & 1 \\ 4+2m & -2-4m & 0 & -2m-2 \\ -m^2-m-1 & 2m-1 & -m & m \\ -9-3m & 6+8m & 1 & 5+4m \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on appelle $f_m : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A_m.

1. Montrer que $\mathcal{P} = \{(1, -1, -m, 3), (0, 1, 0, -2), (0, 0, 1, 0), (0, m, 0, 1 - 2m)\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{P}$.

3. Calculer P^{-1} à l'aide de l'algorithme de Gauss.

4. Montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f_m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que rang f_m = rang $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \end{smallmatrix}\right)$.

6. On note $B_m = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \end{smallmatrix}\right)$. Calculer le déterminant et le rang de cette matrice en fonction de m. En déduire le rang de f_m.

Exercice 3 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
On définit :

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & f & \rightarrow & h \circ f \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est une application linéaire.

2. Dans cette question, on suppose que ϕ est diagonalisable et on montre que h l'est aussi. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_d$ les valeurs propres de ϕ. Pour tout $k \leq d$, on note $L_k = \operatorname{Ker}\left(\phi - \lambda_k I_{\mathcal{L}(E)}\right)$.
a) Montrer qu'il existe $f_1, f_2, ..., f_d \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f_k \in L_k$ pour tout k et $f_1 + f_2 + ... + f_d = I_E$. [Indication : justifier et utiliser le fait que $L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_d = \mathcal{L}(E)$.]
b) Montrer que, pour tous $x \in E$ et $k \leq d$, $f_k(x) \in \operatorname{Ker}(h - \lambda_k I_E)$.
c) Montrer que $\operatorname{Ker}(h - \lambda_1 I_E) + ... + \operatorname{Ker}(h - \lambda_d I_E) = E$. [Indication : montrer d'abord, en utilisant la question a) que, pour tout $x \in E$, $x = f_1(x) + ... + f_d(x)$.]
d) Montrer que h est diagonalisable.

3. Dans cette question, on suppose que h est diagonalisable et on montre que ϕ l'est aussi. Puisque h est diagonalisable, il existe $(v_1, ..., v_n)$ une base de E dont tous les éléments sont des vecteurs propres de h. On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées (c'est-à-dire qu'on a, pour tout s, $h(v_s) = \lambda_s v_s$).
a) Pour tous $k, l \leq n$, on note $f_{k,l}$ l'application linéaire telle que :

$$f_{k,l}(v_s) = 0 \text{ si } s \neq k$$
$$f_{k,l}(v_k) = v_l$$

Montrer que $\phi(f_{k,l}) = \lambda_l f_{k,l}$.
b) Montrer que $\{f_{k,l} \text{ tq } k, l \leq n\}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. En déduire qu'il s'agit d'une base.
c) Conclure.