TD : Algèbre

Exercice 1 :

1. $E = \{(b+c+2d, b, c, d) \text{ tq } b, c, d \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (2,0,0,1)\}$
La famille $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (2,0,0,1)\}$ est libre : si $\lambda_1(1,1,0,0)+\lambda_2(1,0,1,0)+\lambda_3(2,0,0,1) = 0$, alors $(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0,0)$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Elle est libre et génératrice. C'est donc une base de E.

2. Soit $(a,b,c,d) \in E$ quelconque. On va montrer que $f((a,b,c,d)) \in E$. Posons $(a',b',c',d') = f((a,b,c,d))$.
Il faut montrer que $a' - b' - c' - 2d' = 0$. Or, d'après la définition de f :

$$\begin{aligned} a' &= a - 6d \\ b' &= c - d \\ c' &= -b - 2c + d \\ d' &= a - 4d \end{aligned}$$

Donc $a' - b' - c' - 2d' = (a-6d) - (c-d) - (-b-2c+d) - 2(a-4d) = -a+b+c+2d$.
Puisque $(a,b,c,d) \in E$, $-a+b+c+2d = -(a-b-c-2d) = 0$ donc $(a',b',c',d') \in E$.

3. Notons $v_1 = (1,1,0,0), v_2 = (1,0,1,0), v_3 = (2,0,0,1)$ les vecteurs trouvés en 1. et calculons leurs images par g.
$g(v_1) = (1,0,-1,1) \quad g(v_2) = (1,1,-2,1) \quad g(v_3) = (-4,-1,1,-2)$
Décomposons les vecteurs trouvés sur la base $\mathcal{B}$.
On veut écrire $g(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (\alpha+\beta+2\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$. Il faut prendre $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1$: $g(v_1) = 0.v_1 + (-1).v_2 + 1.v_3$.
De même, $g(v_2) = v_1 - 2v_2 + v_3$ et $g(v_3) = -v_1 + v_2 - 2v_3$.
La matrice est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$
On ajoute d'abord la deuxième colonne à la troisième puis on développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 1.\det \begin{pmatrix} -1 & -1-\lambda \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda((-2-\lambda)(-1-\lambda) - 1.(-1-\lambda)) - ((-1)(-1-\lambda) - 1.(-1-\lambda)) \\
&= -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 3) - (2\lambda + 2) \\
&= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 \\
&= (\lambda + 1)(-\lambda^2 - 3\lambda - 2) \\
&= -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) \\
&= -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique, c'est-à-dire $\lambda = -1$ et $\lambda = -2$.
5. Cherchons d'abord l'espace propre associé à -2. Il s'agit de $\mathrm{Ker}\,(g + 2Id)$. La matrice de $g + 2Id$, dans la base $\mathcal{B}$ est $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Un élément est dans le noyau si ses coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On veut donc :

$$\begin{gathered} 2x + y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{gathered}$$

On peut résoudre sans l'algorithme de Gauss : il faut $x = z$ et $y = -x = -z$. Donc $\mathrm{Ker}\,(g+2Id)$ est l'ensemble des éléments de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont de la forme $(z, -z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les éléments de la forme $zv_1 - zv_2 + zv_3 = z(v_1 - v_2 + v_3)$. Donc $\mathrm{Ker}\,(g + 2Id) = \mathrm{Vect}\,\{v_1 - v_2 + v_3\}$.
Le vecteur $v_1 - v_2 + v_3$ est non-nul (car la famille (v_1, v_2, v_3) est libre) donc la famille $\{v_1 - v_2 + v_3\} = \{(2, 1, -1, 1)\}$ est libre ; comme elle est aussi génératrice, c'est une base de $\mathrm{Ker}\,(g + 2\mathrm{Id})$.
Cherchons maintenant l'espace propre associé à -1. Il s'agit de $\mathrm{Ker}\,(g + Id)$. La matrice de $g + Id$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Un élement est dans le noyau si ses coordonnées (x, y, z) en base $\mathcal{B}$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y - z = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(g + Id)$ est l'ensemble des élements dont les coordonnées en base $\mathcal{B}$ sont de la forme $(-y+z, y, z)$, avec $y, z \in \mathbb{R}$. Ces éléments valent $(-y+z)v_1+yv_2+zv_3 = y(-v_1+v_2)+z(v_1+v_3)$. Donc $\mathrm{Ker}\,(g + Id) = \mathrm{Vect}\,\{(-v_1 + v_2), (v_1 + v_3)\}$.
La famille $\{(-v_1+v_2), (v_1+v_3)\}$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}\,(g+Id)$. Montrons qu'elle est libre. Si $\alpha(-v_1 + v_2) + \beta(v_1 + v_3) = 0$, alors $(-\alpha + \beta)v_1 + \alpha v_2 + \beta v_3 = 0$ et donc, puisque (v_1, v_2, v_3) est libre, $-\alpha + \beta = \alpha = \beta = 0$.

Puisqu'elle est libre et génératrice, $\{(-v_1+v_2),(v_1+v_3)\} = \{(0,-1,1,0),(3,1,0,1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(g+Id)$.

6. Les deux espaces propres trouvés sont de dimension 1 et 2. Puisque $1+2=3=\dim E$ et puisque ces deux espaces sont en somme directe (d'après le cours), ils sont supplémentaires et l'union d'une base de chaque est une base de E : $\mathcal{P} = (v_1-v_2+v_3, -v_1+v_2, v_1+v_3)$ est une base de E.
Dans cette base, la matrice de g est $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Rappelons que $\mathcal{B}$ est la base (v_1,v_2,v_3). Les vecteurs de $\mathcal{P}$ sont $v_1-v_2+v_3, -v_1+v_2$ et v_1+v_3. La matrice de passage est donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Calculons P^{-1} par l'algorithme de Gauss.
$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftrightarrow L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On fait le produit des matrices élémentaires et on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{P}\mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{P}}\mathcal{B} = PDP^{-1}$
Donc :

$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP^{-1} &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-2)^n & -(-2)^n & (-2)^n \\ (-1)^{n+1} & 0 & (-1)^n \\ (-1)^n & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(-2)^n+2.(-1)^n & -(-2)^n+(-1)^n & (-2)^n-(-1)^n \\ (-2)^n+(-1)^{n+1} & (-2)^n & -(-2)^n+(-1)^n \\ -(-2)^n+(-1)^n & -(-2)^n+(-1)^n & (-2)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Notons v_1,v_2,v_3,v_4 ces quatre vecteurs.
Comme la famille considérée a 4 éléments et qu'elle appartient à $\mathbb{R}^4$, qui est un espace de dimension 4, il suffit de montrer qu'elle est libre. Il faut donc montrer que, si $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3+\lambda_4v_4=0$, alors $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

Résolvons donc le système $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$. Il est équivalent à :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + m\lambda_4 &= 0 \\ -m\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + (1-2m)\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ce système est simple à résoudre ; il n'est pas nécessaire de passer par l'algorithme de Gauss. D'après la première équation, $\lambda_1 = 0$. D'après la troisième, on doit donc aussi avoir $\lambda_3 = 0$. Les deuxième et quatrième équations deviennent donc :

$$\begin{aligned} \lambda_2 + m\lambda_4 &= 0 \\ -2\lambda_2 + (1-2m)\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Si on ajoute deux fois la première équation à la deuxième, cela devient équivalent à :

$$\begin{aligned} \lambda_2 + m\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est la même chose que $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.
Donc la seule solution du système est bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et la famille est libre.

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & m \\ -m & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1-2m \end{pmatrix}$.

3. $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ -m & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1-2m \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + mL_1$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ m&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1-2m \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ -3&0&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1-2m \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&2&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&m \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - mL_4$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&-m \\ 0&0&1&0 \\ 0&2&0&1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

Le produit des matrices élémentaires donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+m & 1-2m & 0 & -m \\ m & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(f_m) &= \mathcal{M}_{\mathcal{P}}\mathcal{B}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_m)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{P} \\ &= P^{-1}A_m P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+m & 1-2m & 0 & -m \\ m & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 1 & 1 \\ 4+2m & -2-4m & 0 & -2m-2 \\ -m^2-m-1 & 2m-1 & -m & m \\ -9-3m & 6+8m & 1 & 5+4m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & m \\ -m & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1-2m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+m & 1-2m & 0 & -m \\ m & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -m & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Le rang de f_m est égal au rang de la matrice représentant f_m dans n'importe quelle base. Donc rang $f_m = $ rang $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Par définition, le rang d'une matrice est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes (vues comme des éléments de $\mathbb{R}^4$).
La colonne nulle ne change pas la dimension de l'espace engendré donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \dim \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \dim \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or le rang d'une matrice est le même que le rang de sa transposée (propriété du cours). Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dim \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \dim \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \right\} \\ &= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

À nouveau, puisque le rang d'une matrice est le même que le rang de sa transposée :

$$\operatorname{rang} f_m = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \end{pmatrix}$$

6. On commence par soustraire la troisième colonne à la deuxième puis on développe par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \det B_m &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -m & m \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -m \end{pmatrix} \\ &= 2.(-m) - (-1).2 \\ &= 2(1-m) \end{aligned}$$

Si $m \neq 1$, $\det B_m \neq 0$ donc B_m est inversible et son rang est 3, ce qui implique, d'après la question 5., que rang $f_m = 3$.

Si $m=1$, la matrice B_m n'est pas inversible. Elle vaut alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & m \end{pmatrix}$. Déterminons son rang. Le rang est la dimension de l'espace engendré par les colonnes. Il faut donc trouver la dimension de Vect $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \end{pmatrix}\right\}$.

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$ et appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

$L_1 \leftrightarrow L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Puisque l'algorithme de Gauss ne change pas l'espace vectoriel engendré par les lignes :

$$\text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

La famille $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ est libre : si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Donc $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de B_1. Donc cet espace est de dimension 2 ; rang $f_1 =$ rang $B_1 = 2$.

Exercice 3 :

1. Pour tout $x \in E$, $\phi(\lambda f + \mu g)(x) = h((\lambda f + \mu g)(x)) = h(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda h \circ f(x) + \mu h \circ g(x) = (\lambda \phi(f) + \mu \phi(g))(x)$.

Donc $\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \phi(f) + \mu \phi(g)$.

2. a) Puisque ϕ est diagonalisable, ses espaces propres sont en somme directe et leur somme vaut l'espace de définition de ϕ tout entier :

$$L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_d = \mathcal{L}(E)$$

Donc tout élément de $\mathcal{L}(E)$ s'écrit (de manière unique) comme une somme d'éléments des L_k. En particulier, $I_E \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit sous la forme $f_1 + f_2 + ... + f_d$ avec $f_1 \in L_1, f_2 \in L_2, ...$

b) Puisque $f_k \in \text{Ker}\,(\phi - \lambda_k I_{\mathcal{L}(E)})$, $\phi(f_k) = \lambda_k f_k$. Donc $\lambda_k f_k(x) = \phi(f_k)(x) = h(f_k(x))$, c'est-à-dire que $(h - \lambda_k Id_E)(f_k(x)) = 0$.

c) Soit $x \in E$ quelconque.

$x = I_E(x) = (f_1 + ... + f_d)(x) = f_1(x) + ... + f_d(x)$

D'après la question b), $f_k(x) \in \text{Ker}\,(h - \lambda_k I_E)$ pour tout $k \leq d$. Donc $x \in \text{Ker}\,(h - \lambda_1 I_E) + ... + \text{Ker}\,(h - \lambda_d I_E)$. Puisque c'est vrai pour tout x, $E \subset \text{Ker}\,(h - \lambda_1 I_E) + ... + \text{Ker}\,(h - \lambda_d I_E)$. Comme on a aussi $\text{Ker}\,(h - \lambda_1 I_E) + ... + \text{Ker}\,(h - \lambda_d I_E) \subset E$, les deux ensembles sont égaux.

d) La somme des espaces propres de h contient $\text{Ker}\,(h - \lambda_1 I_E) + ... + \text{Ker}\,(h - \lambda_d I_E) = E$. Donc la somme des espaces propres de h vaut E et h est diagonalisable.

3. a) Si $s \neq k$, $\phi(f_{k,l})(v_s) = h(f_{k,l}(v_s)) = h(0) = 0 = \lambda_l f_{k,l}(v_s)$.

De plus, $\phi(f_{k,l})(v_k) = h(f_{k,l}(v_k)) = h(v_l) = \lambda_l v_l = \lambda_l f_{k,l}(v_k)$.

Donc les vecteurs de la base $(v_1, ..., v_n)$ ont les mêmes images par $\phi(f_{k,l})$ et $\lambda_l f_{k,l}$. Ces deux dernières applications sont donc égales (on se souvient que, d'après le cours, une application est uniquement déterminée par l'image des vecteurs d'une base).

b) Supposons que $\sum\limits_{k,l}\alpha_{k,l}f_{k,l} = 0$ et montrons que tous les $\alpha_{k,l}$ sont nuls.
Soit $s \leq n$ quelconque. $0 = \sum\limits_{k,l}\alpha_{k,l}f_{k,l}(v_s)$. Puisque $f_{k,l}(v_s) = 0$ si $k \neq s$ et $f_{k,l}(v_s) = v_l$ si $k = s$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^{n}\alpha_{s,l}f_{s,l}(v_s) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\alpha_{s,l}v_l \end{aligned}$$

Comme $(v_1, ..., v_n)$ est une base, c'est une famille libre. Donc $\alpha_{s,1} = \alpha_{s,2} = ... = \alpha_{s,n} = 0$. C'est vrai pour tout s donc tous les $\alpha_{k,l}$ sont nuls.
La famille est libre. De plus, la dimension de $\mathcal{L}(E)$ est $(\dim E)^2 = n^2$ (c'est une propriété du cours). Il y a justement n^2 fonctions de la forme $f_{k,l}$. Puisque la famille est libre, c'est donc une base.

c) D'après la question b), $\{f_{k,l} \text{ tq } k, l \leq n\}$ est une base. D'après la question a), tous les élements de cette base sont des vecteurs propres de ϕ. Il existe donc une base de $\mathcal{L}(E)$ formée uniquement de vecteurs propres de ϕ. Dans cette base, la matrice de ϕ est diagonale.