# TD : Algèbre

## Corrigé

**Exercice 1 :**

1. Puisque $\mathcal{V}$ contient deux éléments et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\mathcal{V}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est une famille libre. Vérifions donc que $(v_1, v_2)$ est libre.
Si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$, alors $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0)$. Donc $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. En faisant la somme, on trouve $\lambda_1 = 0$ et en faisant la différence, on trouve $\lambda_2 = 0$.
Donc la famille est libre. Donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. a) $v_1 = e_1 + e_2$
$v_2 = -e_1 + e_2$
b) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. a) On cherche $\lambda_1$ et $\lambda_2$ tels que $(1, 0) = e_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$. On doit donc avoir $\lambda_2 = -\lambda_1$ et $2\lambda_1 = 1$, soit $\lambda_1 = 1/2$ et $\lambda_2 = -1/2$ :

$$e_1 = v_1/2 - v_2/2$$

De même :

$$e_2 = v_1/2 + v_2/2$$

b) $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
c) $PS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = SP$

3. a) $z = e_1 + 2e_2$ donc les coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ sont $(1, 2)$.
$z = e_1 + 2e_2 = (v_1/2 - v_2/2) + 2(v_1/2 + v_2/2) = 3v_1/2 + v_2/2$ donc les coordonnées dans la base $\mathcal{V}$ sont $(3/2, 1/2)$.
b) $X_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = PX_{\mathcal{V}}$
$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 2 :**

1. $f(e_1) = -e_1 + 3e_2$
$f(e_2) = 2e_1 - e_2$
$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $f(v_1) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (-1, 3) + (2, -1) = (1, 2)$
$f(v_2) = f(-e_1 + e_2) = -f(e_1) + f(e_2) = (3, -4)$
b) $f(v_1) = e_1 + 2e_2$

$f(v_2) = 3e_1 - 4e_2$
$\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
c) $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}}(f)$
3. a) $f(v_1) = e_1 + 2e_2 = (v_1/2 - v_2/2) + 2(v_1/2 + v_2/2) = 3v_1/2 + v_2/2$
$f(v_2) = 3e_1 - 4e_2 = 3(v_1/2 - v_2/2) - 4(v_1/2 + v_2/2) = -v_1/2 - 7v_2/2$
$\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -7/2 \end{pmatrix}$
b) $S\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -7/2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)$
4. a) $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(z) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{V}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
c) D'après chacune des deux questions précédentes, les coordonnées de $f(z)$ dans la base $\mathcal{E}$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $f(z) = 3e_1 + e_2 = (3, 1)$.

**Exercice 3 :**
1. $g \circ f((x, y)) = g(-x + y, 2x - y) = (2x - y, -x + y, (-x + y) + (2x - y)) = (2x - y, -x + y, x)$.
2. On note $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{E}_3 = (e'_1, e'_2, e'_3)$.
$f(e_1) = (-1, 2) = -e_1 + 2e_2$ et $f(e_2) = (1, -1) = e_1 - e_2$ donc $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$g(e_1) = (0, 1, 1) = 0.e_1 + e_2 + e_3$ et $g(e_2) = (1, 0, 1) = e_1 + 0.e_2 + e_3$ donc $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $M_2M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
On sait que $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(g \circ f)$.
Donc la matrice de $g \circ f$ dans les base $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}(g \circ f((x, y))) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $g \circ f(e_1) = 2e'_1 - e'_2 + e'_3 = (2, -1, 1)$ et $g \circ f(e_2) = -e'_1 + e'_2 = (-1, 1, 0)$.
Pour tout $(x, y)$, $g \circ f((x, y)) = xg \circ f(e_1) + yg \circ f(e_2) = x(2, -1, 1) + y(-1, 1, 0) = (2x - y, -x + y, x)$.

**Exercice 4 :**
[Remarque : ce que, dans la suite, on appelle multilinéarité est la troisième propriété.]
1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, par multilinéarité par rapport à la première colonne, $\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1). \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, par multilinéarité par rapport à la deuxième colonne :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1). \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 1. \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De même, $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3). \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc, par multilinéarité par rapport à la troisième colonne :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1. \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3. \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\det\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&0&1\\0&0&3\end{pmatrix}=0$ car il y a deux colonnes identiques. Pour la même raison, $\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$.
En supprimant les termes nuls dans les égalités de la question 2., on obtient $\det\begin{pmatrix}1&1&-3\\0&-1&1\\0&0&3\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.
4. Par multilinéarité par rapport à la troisième colonne, puisque $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ :

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}+3\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Le premier déterminant de la somme est nul car la matrice a deux colonnes identiques. D'où l'égalité voulue.
5. En regroupant les questions 1., 3. et 4., on obtient $\det A=-6\det I_3$. Puisque $\det I_3=1$ (première propriété du déterminant), $\det A=-6$. Cela vaut bien $2\times(-1)\times 3$.

**Exercice 5 :**
1. a) $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des $(w,x,y,z)$ tels que :

$$f((w,x,y,z))=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} w+x+2y-3z=0\\ w-x-y+2z=0\\ -5w+x-y=0\end{cases}$$

Résolvons ce système. On note $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\1&-1&-1&2&0\\-5&1&-1&0&0\end{pmatrix}$ la matrice augmentée associée et on lui applique l'algorithme de Gauss.
$L_3\leftarrow L_3+5L_1$, $\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\1&-1&-1&2&0\\0&6&9&-15&0\end{pmatrix}$
$L_2\leftarrow L_2-L_1$, $\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\0&-2&-3&5&0\\0&6&9&-15&0\end{pmatrix}$
$L_3\leftarrow L_3+3L_2$, $\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\0&-2&-3&5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
$L_2\leftarrow -L_2/2$, $\begin{pmatrix}1&1&2&-3&0\\0&1&3/2&-5/2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
$L_1\leftarrow L_1-L_2$, $\begin{pmatrix}1&0&1/2&-1/2&0\\0&1&3/2&-5/2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$
Les solutions sont donc les $(w,x,y,z)$ tels que $\begin{pmatrix}1&0&1/2&-1/2&0\\0&1&3/2&-5/2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, soit :

$$w=-1/2y+1/2z$$
$$x=-3/2y+5/2z$$

Donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f&=\{(-1/2y+1/2z,-3/2y+5/2z,y,z)\text{ tq } y,z\in\mathbb{R}\}\\&=\operatorname{Vect}\{(-1/2,-3/2,1,0),(1/2,5/2,0,1)\}\end{aligned}$$

La famille $\{(-1/2,-3/2,1,0),(1/2,5/2,0,1)\}$ est libre : si $\lambda_1(-1/2,-3/2,1,0)+\lambda_2(1/2,5/2,0,1) = (0,0,0,0)$, alors, en regardant les deux dernières coordonnées, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Elle est libre et génératrice de $\mathrm{Ker}\, f$ : $\{(-1/2,-3/2,1,0),(1/2,5/2,0,1)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

b) [Remarque : la solution qui suit n'est pas la plus simple mais c'est celle qui suit la méthode du TD du 14 mars.]
On note $M = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on lui applique l'algorithme de Gauss :
$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
La famille $\{(-1/2,-3/2,1,0),(0,1,1,1)\}$ est une autre base de $\mathrm{Ker}\, f$ (mais on ne le démontre pas car on n'en a pas besoin ici). Comme la matrice obtenue contient des pivots dans les colonnes 1 et 2, on va essayer de compléter la base qu'on avait par les vecteurs $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$ de la base canonique.
Montrons que $(e_3, e_4, (-1/2,-3/2,1,0),(1/2,5/2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$. C'est une famille à 4 éléments et $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4. Pour montrer que c'est une base, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre (propriété du cours : dans un espace de dimension $n$, une famille à $n$ éléments est libre si et seulement si c'est une base).
Si $\lambda_1(0,0,1,0)+\lambda_2(0,0,0,1)+\lambda_3(-1/2,-3/2,1,0)+\lambda_4(1/2,5/2,0,1) = (0,0,0,0)$, alors :

$$\begin{aligned} -1/2\lambda_3 + 1/2\lambda_4 &= 0 \\ -3/2\lambda_3 + 5/2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda_4 = (-3/2\lambda_3 + 5/2\lambda_4) - 3(-1/2\lambda_3 + 1/2\lambda_4) = 0$. On doit donc aussi avoir $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$. On a enfin $\lambda_1 = 0$. La famille est bien libre. C'est une base.
On peut donc prendre $u_1 = e_3 = (0,0,1,0)$, $u_2 = (0,0,0,1)$, $u_3 = (-1/2,-3/2,1,0)$, $u_4 = (1/2,5/2,0,1)$.

c) La dimension de $\mathrm{Ker}\, f$ est 2 car la base trouvée en a) contient 2 éléments.
D'après le théorème du rang appliqué à $f$, $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rang}\, f = 2 + \mathrm{rang}\, f$. Donc $\mathrm{rang}\, f = 4 - 2 = 2$.

2. a) $f(u_1) = f((0,0,1,0)) = (2,-1,-1)$ ; $f(u_2) = f((0,0,0,1)) = (-3,2,0)$
b) C'est une famille à 3 éléments et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre. Vérifions qu'il s'agit d'une famille libre : si $\lambda_1(2,-1,-1)+\lambda_2(-3,2,0)+\lambda_3(0,0,1) = (0,0,0)$, alors :

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda_2 = (2\lambda_1 - 3\lambda_2) + 2(-\lambda_1 + 2\lambda_2) = 0$. Donc $\lambda_1 = 0$. Donc $\lambda_3 = 0$. La famille est bien libre. C'est bien une base.

3. a) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $S = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) On applique à $S$ l'algorithme de Gauss.

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1/2$, $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'inverse est obtenue en faisant le produit (dans le bon ordre) des matrices élémentaires :

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $Q = S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (voir exercice 1, question 3.c)).

4. a) On note $\mathcal{E}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $\mathcal{E}_3 = (e'_1, e'_2, e'_3)$. On a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e'_1 + e'_2 - 5e'_3 \\ f(e_2) &= e'_1 - e'_2 + e'_3 \\ f(e_3) &= 2e'_1 - e'_2 - e'_3 \\ f(e_4) &= -3e'_1 + 2e'_2 + 0e'_3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_\ni}^{\mathcal{E}_\triangle}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{U}}(f) &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}_3)\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{E}_4}(\mathcal{U}) \\ &= Q\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f)P \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 5/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Les deux dernières colonnes de la matrice trouvée correspondent à l'image par $f$ des vecteurs $u_3$ et $u_4$. Puisque ce sont des éléments du noyau (on les a construits en 1.a) comme une base du noyau), leur image est nulle et les deux dernières colonnes de la matrice sont nulles.

Les deux premières colonnes correspondent à l'image de $u_1$ et $u_2$. Puisque $f(u_1)$ et $f(u_2)$ sont les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}$, la décomposition de $f(u_1)$ et $f(u_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ est très simple : elle contient seulement des zéros, à part un 1 en position 1 (ou 2 pour $u_2$). Les deux premières colonnes de la matrice trouvées n'ont donc elle aussi qu'un coefficient non-nul, 1, en première ou deuxième position.

**Exercice 6 :**

1. a) On montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
- $0 \in \mathbb{Q}[\alpha]$
- Si $x = a_0 + ... + a_n\alpha^n \in \mathbb{Q}[\alpha]$ et $y = a'_0 + ... + a'_{n'}\alpha^{n'} \in \mathbb{Q}[\alpha]$, la somme des deux aussi : on peut supposer $n \geq n'$ et on a alors $x + y = (a_0 + a'_0) + ... + (a_{n'} + a'_{n'})\alpha^{n'} + ... + a_n\alpha^n \in \mathbb{Q}[\alpha]$.
- $\mathbb{Q}[\alpha]$ est stable par multiplication par un scalaire.

b) $x_1 = a_0 + ... + a_n\alpha^n$ et $x_2 = b_0 + ... + b_m\alpha^m$.
$x_1x_2 = \sum\limits_{k,l} a_kb_l\alpha^{k+l}$
Pour tous $k \leq n$ et $l \leq m$, $a_kb_l\alpha^{k+l} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ donc, puisque $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un espace vectoriel (stable par addition, donc), la somme des $a_kb_l\alpha^{k+l}$ est aussi un élément de $\mathbb{Q}[\alpha]$. Donc $x_1x_2 \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha]$. Alors $(1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^n)$ est une famille liée (puisque toutes les familles libres ont au plus $n$ éléments et celle-là en a $n + 1$). Il existe donc, par définition d'une famille liée, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ tels que $a_0.1 + ... + a_n\alpha^n = 0$.
Si on pose $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, on a bien le résultat voulu.

d) On procède par récurrence sur $k$.
- Pour $k = d$ : $a_d\alpha^d = -a_0 - ... - a_{d-1}\alpha^{d-1}$ donc $\alpha^d = -a_0/a_d - ... - a_{d-1}/a_d\alpha^{d-1} \in \text{Vect}\,(1, ..., \alpha^{d-1})$.
- Si c'est vrai jusqu'à $k$, pour $k+1$ : en multipliant par $\alpha^{k+1-d}$ l'égalité précédente, on a $\alpha^{k+1} = -a_0/a_d\alpha^{k+1-d} - ... - a_{d-1}/a_d\alpha^k \in \text{Vect}\,(1, ..., \alpha^k)$. Mais puisque la propriété est vraie jusqu'à $k$, tous les $\alpha^d, ..., \alpha^k$ appartiennent à $\text{Vect}\,(1, ..., \alpha^{d-1})$. Donc $\text{Vect}\,(1, ..., \alpha^k) = \text{Vect}\,(1, ..., \alpha^{d-1})$ et $\alpha^{k+1} \in \text{Vect}\,(1, ..., \alpha^{d-1})$.
Tout élément de $\mathbb{Q}[\alpha]$ appartient donc à $\text{Vect}\,(1, ..., \alpha^{d-1})$. Donc $\mathbb{Q}[\alpha]$ admet une famille génératrice de cardinal $d$ : c'est un espace vectoriel de dimension finie.

2. a) Puisque $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps, tout élément non-nul admet un inverse. En particulier, $\alpha$ admet un inverse, c'est-à-dire que $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ (la multiplication sur $\mathbb{Q}[\alpha]$ est la même que la multiplication sur $\mathbb{R}$ donc l'inverse est le même).
Donc $\frac{1}{\alpha} = a_0 + ... + a_n\alpha^n$. En multipliant par $\alpha$ et en soustrayant 1, $-1 + a_0\alpha + ... + a_{n+1}\alpha^{n+1} = 0$.
Le polynôme $P(X) = -1 + a_0X + ... + a_{n+1}X^{n+1}$ convient.

b) Soit $x \in \mathbb{Q}[\alpha] - \{0\}$ quelconque. Comme $\mathbb{Q}[\alpha]$ est stable par produit (1.b)), $x^k \in \mathbb{Q}[\alpha]$ pour tout $k \geq 0$. Puisque $\mathbb{Q}[\alpha]$ est de dimension finie (question 1.d)), il existe $d \geq 0$ tel que $(1, x, ..., x^d)$ est une famille liée (il suffit de prendre pour $d$ la dimension de $\mathbb{Q}[\alpha]$).
Pour certains rationnels $a_k$ non tous nuls, on a donc $a_0 + ... + a^dx^d = 0$. Posons $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_dX^d$.
Soit $s$ le plus petit entier tel que $a_s \neq 0$. On pose $\tilde{P}(X) = P(X)/(a_sX^s) = 1 + a_{s+1}/a_sX + ... + a_d/a_sX^{d-s}$. C'est un polynôme à coefficients rationnels tel que $\tilde{P}(x) = P(x)/(a_sx^s) = (a_0 + ... + a^dx^d)/(a_sx^s) = 0$.
Donc $1 = 1 - \tilde{P}(x) = x(-a_{s+1}/a_s - ... - a_d/a_sx^{d-s-1})$.
Donc $\frac{1}{x} = -a_{s+1}/a_s - ... - a_d/a_sx^{d-s-1}$.

Puisque, pour tout $k$, $x^k \in \mathbb{Q}[\alpha]$, et puisque $\mathbb{Q}[\alpha]$ est stable par combinaisons linéaires, $-a_{s+1}/a_s - ... - a_d/a_s x^{d-s-1} \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Donc l'inverse de $x$ pour la loi $\times$ est dans $\mathbb{Q}[\alpha]$.