Université Pierre et Marie Curie
LM125

Le 1er mars 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Exercice 0 :

Soit E un espace vectoriel. Soient F, G_1, G_2 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $G_1 \subset F$ et $G_2 \subset F$, alors $G_1 + G_2 \subset F$.

Exercice 1 :

1. Notons E_1 et E_2 les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$ suivants :

$$E_1 = \{(w, w, 0, 0) \text{ tq } w \in \mathbb{C}\}$$
$$E_2 = \{(w, x, y, w) \text{ tq } w, x, y \in \mathbb{C}\}$$

a) Montrer que $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^4$.
b) E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{C}^4$?

2. Soient w_1, w_2, w_3 les éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$w_1 = (1, 0, 2, -1) \quad w_2 = (0, 1, 1, -2) \quad w_3 = (1, -2, -3, 4)$$

a) Calculer l'intersection de $E_1 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_3)$.
b) Montrer que $E_1 + E_2 \subset \{(a, b, c, d) \text{ tq } a + b + c + d = 0\}$. E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

3. Soient $E_1 = \{f : [0; 1] \to \mathbb{R} \text{ continue tq } \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ et $E_2 = \{f : [0; 1] \to \mathbb{R} \text{ constante}\}$.
a) Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$).
b) Montrer que E_2 est un supplémentaire de E_1.

4. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On note U_T l'ensemble des suites T-périodiques (c'est-à-dire telles que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pouvez-vous trouver un supplémentaire simple de U_T dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $V_1, V_2 \subset E$ des sous-espaces vectoriels de E. On va montrer que, si $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $V_1 \subset V_2$ ou $V_2 \subset V_1$.

On suppose que $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $V_1 \subset V_2$, il n'y a plus rien à démontrer. On se place donc dans le cas où $V_1 \not\subset V_2$.

1. Montrer qu'il existe un élément $x \in E$ tel que $x \in V_1$ mais $x \notin V_2$. On suppose dans la suite un tel x fixé.

2. Soit $y \in V_2$ quelconque. Montrer que $x + y \in V_1$ ou $x + y \in V_2$.

3. Montrer qu'il n'est pas possible que $x + y \in V_2$.

4. Déduire des questions précédentes que $x + y \in V_1$, puis que $y \in V_1$.

5. Montrer que $V_2 \subset V_1$.

Exercice 3 :

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $V \subset \mathbb{K}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On va montrer qu'il existe au moins un supplémentaire de V dans $\mathbb{K}^n$.

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on note e_i le vecteur $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, où le 1 est en position i.

On pose $E_0 = \{0\}$. On construit par récurrence une suite $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$: lorsque E_k est construit, si $V + E_k$ contient le vecteur e_{k+1}, on prend $E_{k+1} = E_k$. Sinon, on prend $E_{k+1} = E_k + \text{Vect}\{e_{k+1}\}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $k \leq n$, E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ tel que $V \cap E_k = \{0\}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $k \leq n$, $\text{Vect}(e_1, ..., e_k) \subset V + E_k$.

3. Montrer que $\text{Vect}(e_1, ..., e_n) = \mathbb{K}^n$.

4. Montrer que E_n est un supplémentaire de V.