Le 1er mars 2013
http ://www.eleves.ens.fr/home/waldspur/LM125.html

TD : Algèbre

Corrigé

Exercice 0 :

Si $x \in G_1 + G_2$, alors x s'écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in G_1$ et $x_2 \in G_2$ (par définition de $G_1 + G_2$). Comme F est stable par addition (c'est un sous-espace vectoriel) et comme $x_1, x_2 \in F$ (puisque $G_1, G_2 \subset F$), $x = x_1 + x_2 \in F$.
Donc tout élément de $G_1 + G_2$ est un élément de F : $G_1 + G_2 \subset F$.

Exercice 1 :

1. a) $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$. Il faut montrer qu'il s'agit de $\mathbb{C}^4$ tout entier. Il faut donc montrer que tout élément (a, b, c, d) de $\mathbb{C}^4$ peut s'écrire sous la forme $u + v$ avec $u \in E_1$ et $v \in E_2$.
Le vecteur u doit être de la forme $u = (w, w, 0, 0)$ et v de la forme $v = (w', x', y', w')$. La condition $u + v = (a, b, c, d)$ peut se récrire sous la forme :

$$(a, b, c, d) = (w + w', w + x', y', w')$$
$$\Leftrightarrow y' = c \qquad w' = d \qquad w = a - w' = a - d \qquad x' = b - w = b - a + d$$

On trouve donc $(a, b, c, d) = (a - d, a - d, 0, 0) + (d, b - a + d, c, d)$, avec $(a - d, a - d, 0, 0) \in E_1$ et $(d, b - a + d, c, d) \in E_2$. Tout élément de $\mathbb{C}^4$ est donc bien la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 : $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^4$.
b) E_1 et E_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^4$ car la décomposition $(a, b, c, d) = (a-d, a-d, 0, 0) + (d, b - a + d, c, d)$ trouvée en a) est unique.
Une autre façon de le démontrer est de montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet, soit $u \in E_1 \cap E_2$ quelconque. Puisque $u \in E_1$, u est de la forme $u = (w, w, 0, 0)$. D'autre part, puisque $u \in E_2$, u est de la forme $u = (w', x', y', w')$. L'égalité $(w, w, 0, 0) = (w', x', y', w')$ implique $y' = w' = 0$ puis $w = w' = 0$. Donc $u = (0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire que le seul élément de $E_1 \cap E_2$ est le vecteur nul.
2. a) On cherche le(s) vecteur(s) $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tel(s) que $\underline{x} \in E_1 \cap E_2$.
Si $\underline{x} \in E_1$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\underline{x} = \lambda w_1 + \mu w_2$, car $E_1 = \{\lambda w_1 + \mu w_2 \text{ tq } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. De

plus, si $\underline{x} \in E_2$, il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{x} = \nu w_3$. On doit donc avoir :

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \underline{x} = \nu w_3$$
$$\Leftrightarrow (\lambda, 0, 2\lambda, -\lambda) + (0, \mu, \mu, -2\mu) = (\nu, -2\nu, -3\nu, 4\nu)$$
$$\Leftrightarrow (\lambda, \mu, 2\lambda + \mu, -\lambda - 2\mu) = (\nu, -2\nu, -3\nu, 4\nu)$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \nu \quad \mu = -2\nu \quad 2\lambda + \mu = -3\nu \quad -\lambda - 2\mu = 4\nu$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \nu \quad \mu = -2\nu \quad 0 = -3\nu \quad -5\nu = 4\nu$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

On a alors $\underline{x} = 0.w_1 + 0.w_2 = 0.w_3 = 0$. Donc $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

b) Notons $F = \{(a, b, c, d) \text{ tq } a + b + c + d = 0\}$.

$w_1, w_2, w_3 \in F$

On peut vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. L'ensemble F est donc stable par combinaison linéaire. Il contient donc $E_1 = \text{Vect}(w_1, w_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(w_3)$ (puisque ces deux ensembles ne contiennent que des combinaisons linéaires d'éléments de F). D'après l'exercice 0, il contient donc aussi $E_1 + E_2$.

Puisque $E_1 + E_2 \subset F$, $E_1 + E_2 \neq \mathbb{R}^4$ (on a par exemple $(1, 0, 0, 0) \notin F$ donc $(1, 0, 0, 0) \notin E_1 + E_2$). Les ensembles E_1 et E_2 ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. a) E_1 et E_2 sont des sous-ensembles de $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$. Montrons qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels.

- Ils sont non-vides : tous deux contiennent la fonction nulle.
- Ils sont stables par addition : si $f_1, f_2 \in E_1$, $\int_0^1 (f_1 + f_2)(x)dx = \int_0^1 f_1(x)dx + \int_0^1 f_2(x)dx = 0$ donc $f_1 + f_2 \in E_1$. Ainsi, E_1 est stable par addition. De plus, comme la somme de deux fonctions constantes est constante, E_2 est aussi stable par addition.
- Ils sont stables par multiplication par un scalaire : si $f \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)dx = 0$ donc $\lambda f \in E_1$. Donc E_1 est stable par multiplication par un scalaire. Si $f \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in E_2$. En effet, si on note a l'unique valeur de la fonction constante f, $\lambda f(x) = \lambda a$ pour tout $x \in [0; 1]$ donc λf est aussi une fonction constante et $\lambda f \in E_2$. Donc E_2 est aussi stable par multiplication par un scalaire.

b) $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet, si $f \in E_1 \cap E_2$, f est une fonction constante. Notons a son unique valeur. On doit avoir $a = \int_0^1 a dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$ donc f est la fonction nulle.

$E_1 + E_2 = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$: soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ quelconque. Notons f_2 la fonction constante telle que, pour tout $x \in [0; 1]$, $f_2(x) = \int_0^1 f(x)dx$. Notons $f_1 = f - f_2$. Alors $f_1 \in E_1$. En effet, si on note a l'unique valeur de f_2 :

$$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 (f(x) - a)dx = \int_0^1 f(x)dx - a = 0$$

En outre, $f = f_1 + f_2$ donc f est bien la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

4. Notons $V = \{u \in \mathbb{R}^N \text{ tq } u_k = 0 \forall k < T\}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Montrons que $U_T \oplus V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$U_T \cap V = \{0\}$: il faut montrer que, si $u \in U_T \cap V$, alors u est la suite nulle. En effet, tout $k \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $k = aT + b$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \{0, ..., N - 1\}$. Puisque u est T-périodique ($u \in U_T$), $u_k = u_{aT+b} = u_b$ et puisque $u \in V$ et $b < N$, $u_b = 0$ donc $u_k = 0$.

$U_T + V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ quelconque. Nous allons montrer qu'elle s'écrit sous la forme $u = u' + v$ avec $u' \in U_T$ et $v \in V$.
Pour tout k, on note $\mod(k,T)$ le reste de k dans la division par T (c'est-à-dire l'entier b du paragraphe précédent). On pose $u'_k = u_{\mod(k,T)}$ et $v_k = u_k - u'_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a bien $u = v + u'$, par construction de v. De plus, la suite u' est T-périodique car $u_{\mod(k+T,T)} = u_{\mod(k,T)}$ et, pour tout $k < T$, $v_k = u_k - u_{\mod(k,T)} = u_k - u_k = 0$. Donc $u' \in U_T$ et $v \in V$.

Exercice 2 :

1. Il existe au moins un élément de V_1 n'appartenant pas à V_2 (sinon on aurait $V_1 \subset V_2$). Soit x un tel élément.

2. $x \in V_1 \cup V_2$ et $y \in V_1 \cup V_2$ (car $x \in V_1$ et $y \in V_2$). Puisque $V_1 \cup V_2$ est un sous-espace vectoriel, il s'agit d'un ensemble stable par addition. Donc $x + y$, étant la somme de deux éléments de $V_1 \cup V_2$, est aussi un élément de $V_1 \cup V_2$. Donc $x + y \in V_1$ ou $x + y \in V_2$.

3. Si $x + y \in V_2$, $x = (x + y) - y \in V_2$ car il s'agit d'une combinaison linéaire de deux éléments de V_2, $x + y$ et y. C'est impossible car $x \notin V_2$.

4. D'après les questions 2. et 3., $x + y \in V_1$ ou $x + y \in V_2$ mais $x + y \notin V_2$. Donc $x + y \in V_1$ et $y = (x + y) - x \in V_1$ puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire d'éléments de V_1.

5. D'après les questions 2. à 4., si y est un élément quelconque de V_2, alors $y \in V_1$. Cela signifie que tous les éléments de V_2 sont aussi des éléments de V_1, c'est-à-dire que $V_2 \subset V_1$.

Exercice 3 :

1. Pour $k = 0$: $E_0 = \{0\}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. De plus, $V \cap E_0 = V \cap \{0\} = \{0\}$.
Si c'est vrai pour k, pour $k + 1$: si $E_{k+1} = E_k$, alors E_{k+1} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et $E_{k+1} \cap V = E_k \cap V = \{0\}$, par hypothèse de récurrence.
Sinon, e_{k+1} n'appartient pas à $V + E_k$ et $E_{k+1} = E_k + \{\lambda e_{k+1} \text{ tq } \lambda \in \mathbb{K}\}$. E_{k+1} est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ car c'est la somme de deux sous-espaces vectoriels. Il faut montrer que $V \cap E_{k+1} = \{0\}$. Soit $x \in V \cap E_{k+1}$ quelconque. On va montrer que $x = 0$.
Puisque $x \in E_{k+1} = E_k + \{\lambda e_{k+1} \text{ tq } \lambda \in \mathbb{K}\}$, il existe $y \in E_k$ et $\lambda e_{k+1} \in \{\lambda e_{k+1} \text{ tq } \lambda \in \mathbb{K}\}$ tels que $y + \lambda e_{k+1} = x$.
Si $\lambda \neq 0$, $e_{k+1} = \frac{1}{\lambda}(x - y)$. Or $x \in V$ et $y \in E_k$ donc $\frac{1}{\lambda}(x - y) \in V + E_k$. C'est impossible car $V + E_k$ ne contient pas e_{k+1}. Donc $\lambda = 0$, $x = y \in E_k$ et $x = 0$ puisque $x \in E_k \cap V$ et $E_k \cap V = \{0\}$ par hypothèse de récurrence.
On a donc montré que, si $x \in V \cap E_{k+1}$, $x = 0$. Cela démontre que $V \cap E_{k+1} = \{0\}$. L'hypothèse de récurrence est donc démontrée au rang $k + 1$.

2. Pour $k = 0$, c'est vrai : $\text{Vect}\emptyset = \{0\} \subset V + E_0$.
Si c'est vrai pour k, démontrons-le pour $k+1$: $\text{Vect}(e_1, ..., e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, ..., e_k) + \text{Vect}(e_{k+1})$.
Par hypothèse de récurrence et comme $E_k \subset E_{k+1}$, $\text{Vect}(e_1, ..., e_k) \subset V + E_k \subset V + E_{k+1}$.
D'après l'exercice 0, il suffit donc de démontrer que $\text{Vect}(e_{k+1}) \subset V + E_{k+1}$, c'est-à-dire de démontrer que $e_{k+1} \in V + E_{k+1}$.
Si $e_{k+1} \in V + E_k$, alors $E_{k+1} = E_k$ et $e_{k+1} \in V + E_k$. En revanche, si $e_{k+1} \notin V + E_k$, alors $E_{k+1} = E_k + \text{Vect}(e_{k+1})$ donc $e_{k+1} \in E_{k+1} \subset V + E_{k+1}$. Donc dans tous les cas, $e_{k+1} \in V + E_{k+1}$.

Cela démontre l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$.

3. Pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ donc $(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$.

4. D'après la question 2., $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) \subset V + E_n$. Puisque $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^n \subset V + E_n$, c'est-à-dire $\mathbb{K}^n = V + E_n$. D'autre part, d'après la question 1., $V \cap E_n = \{0\}$. Donc V et E_n sont supplémentaires.