Université Pierre et Marie Curie — Le 4 avril 2013
LM125

Contrôle continu : algèbre linéaire

Exercice 1 : [Question de cours] [1,5]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que si $f : E \to F$ est linéaire et bijective, alors son application réciproque f^{-1} est linéaire.

Exercice 2 : [3]

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Donner une base de E.

2. On note $F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. E et F sont-ils supplémentaires ?

Exercice 3 : [6,5]

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que :

$$f(e_1) = (1,2,2) \quad f(e_2) = (-1,1,-1) \quad f(e_3) = (1,-2,0)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

2. a) Montrer que $\mathcal{V} = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{V}$.

c) Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\mathcal{B}$, la matrice de passage de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{B}$.

d) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)$, est diagonale. La calculer.

3. En utilisant la relation liant $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f), \mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f), \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}\mathcal{B}$, calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : [6]

Soient :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & (x_1 + x_2 - 2x_3, \;\; x_1 + 2x_2 - 3x_3) \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & (x_1 - x_3, \;\; 2x_1 + x_2 - 3x_3) \end{array}$$

1. a) Calculer une base de $\operatorname{Ker} f$.
b) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

2. Donner les matrices de f et g dans les bases canoniques.

3. a) Trouver $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Donner l'expression d'une application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $g = h \circ f$.

Exercice 5 : [3]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $f : E \to E$ une application linéaire nilpotente (c'est-à-dire telle que $f^d = 0$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$).
1. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.
b) Montrer, à l'aide du théorème du rang, que $\dim(\operatorname{Im} f) < n$.
c) On définit $f' : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f$ de la façon suivante : pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, $f'(x) = f(x)$. Montrer que f' est linéaire et nilpotente.
d) On suppose qu'il existe $(e_1, ..., e_s)$ une base de $\operatorname{Im} f$ telle que :

$$\forall k \leq s, f'(e_k) \in \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$$

On complète cette base en une base de E, $(e_1, ..., e_n)$. Montrer que :

$$\forall k \leq n, f(e_k) \in \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$$

[Bonus]
2. À l'aide des questions précédentes, montrer par récurrence sur n qu'il existe $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que, pour tout $k \leq n$, $f(e_k) \in \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E vérifiant la propriété de la question 2. Montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure et que tous les coefficients de sa diagonale sont nuls.