Université Pierre et Marie Curie — Le 4 avril 2013
LM125

Contrôle continu : algèbre linéaire

Corrigé

Exercice 1 :

Soient $x, y \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Nous allons montrer que $f^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)$.
$f^{-1}(\lambda x + \mu y)$ est l'unique élément de E tel que $f(f^{-1}(\lambda x + \mu y)) = \lambda x + \mu y$ (c'est la définition de f^{-1}). Or, par linéarité de f :

$$f(\lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)) = \lambda f(f^{-1}(x)) + \mu f(f^{-1}(y)) = \lambda x + \mu y$$

Donc, par unicité, $f^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda f^{-1}(x) + \mu f^{-1}(y)$.

Exercice 2 :

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et appliquons l'algorithme de Gauss à A jusqu'à ce que A soit échelonnée.

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Appliquer aux lignes de A des opérations élémentaires ne change pas l'espace vectoriel engendré par les lignes. Donc :

$$E = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Montrons que la famille génératrice obtenue est libre. Si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on doit avoir :

$$\lambda_1 = 0$$
$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$-3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

Donc $\lambda_1 = 0$, puis $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_3 = 0$.
Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre et génératrice de E. C'est une base.

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une base de F (c'est une famille génératrice ; c'est aussi une famille libre car toute famille à un élément est libre si l'élément est non-nul).
E et F sont supplémentaires si et seulement si, en concaténant la base de E trouvée en 1 et la base de F fournie, on obtient une base de $\mathbb{R}^4$. Donc E et F sont supplémentaires si et seulement si $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
Comme c'est une famille à 4 éléments et comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, c'est une base si et seulement si c'est une famille libre. Déterminons donc si c'est une famille libre.
C'est une famille libre si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Résolvons donc ce système. Il est équivalent à :

$$\lambda_1 + \lambda_4 = 0$$
$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0$$
$$-3\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

La matrice augmentée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss :

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow -L_4/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Toutes les variables sont essentielles. La solution est donc unique et la famille est libre.
E et F sont supplémentaires.

Exercice 3 :
1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. a) Puisque c'est une famille à 3 éléments et puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer qu'elle est libre.
Si $\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,1,1) = (0,0,0)$, alors $\lambda_1+\lambda_3 = 0$, $\lambda_2+\lambda_3 = 0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$. En soustrayant la deuxième équation à la troisième, on trouve $\lambda_1 = 0$. D'après la première équation, on doit avoir $\lambda_3 = 0$ et d'après la deuxième, $\lambda_2 = 0$. Donc la famille est libre. C'est une base.
b) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
c) C'est l'inverse de la matrice précédente (propriété du cours). Cherchons donc l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, par l'algorithme de Gauss.
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$L_3 \leftarrow -L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
L'inverse est obtenu en faisant le produit des matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{V}}\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f) &= \mathcal{M}_{\mathcal{V}}\mathcal{B}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V}\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V})^{-1}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)^n &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V}\mathcal{M}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f)^n(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}\mathcal{V})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2^n & 2^n \\ -(-1)^n & 0 & (-1)^n \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & -1+2^n \\ 1-(-1)^n & 1 & -1+(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 1-2^n & -1+(-1)^n+2^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. a) $\operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tq } x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \text{ et } x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$.
Résolvons le système d'équations. Sa matrice augmentée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. On lui applique l'algorithme de Gauss :
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Les variables x_1 et x_2 sont essentielles ; x_3 est libre. Résolvons donc en fonction de x_3.
Les solutions sont les (x_1, x_2, x_3) tels que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, soit $x_1 = x_3$ et $x_2 = x_3$.
Donc $\operatorname{Ker} f = \{(x_3, x_3, x_3) \text{ tq } x_3 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.
La famille $\{(1, 1, 1)\}$ est libre (c'est une famille à un seul élément, non-nul) donc c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

b) Il faut montrer que, si $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} f$, alors $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} g$. Si $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} f$, d'après la question précédente, $x_1 = x_2 = x_3$ donc :

$$\begin{aligned} g((x_1, x_2, x_3)) = g((x_3, x_3, x_3)) = (x_3 - x_3, 2x_3 + x_3 - 3x_3) = (0, 0) \\ \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker} g \end{aligned}$$

2. On note $\mathcal{E}_2 = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
$f(e_1) = (1, 1) = e'_1 + e'_2$, $f(e_2) = (1, 2) = e'_1 + 2e'_2$, $f(e_3) = (-2, -3) = -2e'_1 - 3e'_2$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
De même, $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+2b & -2a-3b \\ c+d & c+2d & -2c-3d \end{pmatrix}$ donc l'égalité est vraie si et seulement si :

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ a + 2b &= 0 \\ -2a - 3b &= -1 \\ c + d &= 2 \\ c + 2d &= 1 \\ -2c - 3d &= -3 \end{aligned}$$

Soit :

$$b = 1 - a$$
$$-a + 2 = 0$$
$$a = 2$$
$$d = 2 - c$$
$$-c = -3$$
$$c = 3$$

ce qui est équivalent à $a = 2, b = -1, c = 3, d = -1$.

b) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application dont la matrice dans la base canonique est $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, pour les valeurs de a, b, c, d trouvées à la question précédente.
Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(g) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right) = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(h)\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(h \circ f)$ donc $g = h \circ f$.
Donnons une expression explicite de h. Puisque $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(h) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, on doit avoir :

$$h(e'_1) = 2e'_1 + 3e'_2 \qquad h(e'_2) = -e'_1 - e'_2$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h((x, y)) = xh(e'_1) + yh(e'_2) = (2x - y)e'_1 + (3x - y)e'_2 = (2x - y, 3x - y)$.

Exercice 5 :

1. a) Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Soit k le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^k(x) = 0$. Alors $f^{k-1}(x) \neq 0$ et $f(f^{k-1}(x)) = 0$ donc $f^{k-1}(x)$ est un élément différent de 0 de $\operatorname{Ker} f$. (Si $k = 1$, $f^{k-1}(x) = \operatorname{Id}(x) = x$.)

b) $\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rang} f = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f) = n - \dim(\operatorname{Ker} f)$.
Puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, $\dim(\operatorname{Ker} f) > 0$ donc $\dim(\operatorname{Im} f) < n$.

c) Soient $x, y \in \operatorname{Im} f$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quelconques. $f'(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda f'(x) + \mu f'(y)$. Donc f' est linéaire.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^d = 0$. Pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, $f'^d(x) = f^d(x) = 0$. Donc $f'^d = 0$ et f' est nilpotente.

d) Si $k \leq s$, $f(e_k) \in \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$, par hypothèse.
Si $k \in \{s + 1, ..., n\}$: $f(e_k) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_s\} \subset \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$ puisque $s \leq k - 1$.

2. Pour $n = 1$: puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1 = \dim E$ donc, comme $\operatorname{Ker} f \subset E$, ce qui implique que $\dim \operatorname{Ker} f \leq \dim E$, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E$ et $\operatorname{Ker} f = E$. Si (e_1) est une base de E, on a donc $e_1 \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(e_1) \in \operatorname{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$.
On suppose qu'on a démontré la propriété voulue pour $\dim E < n$ (avec $n \geq 1$) et on la démontre pour $\dim E = n$.
Puisque $\dim \operatorname{Im} f < n$ (question 1.b)) et $f' : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f$ est nilpotente (1.c)), on peut appliquer à $\operatorname{Im} f$ et f' l'hypothèse de récurrence : il exisete $(e_1, ..., e_s)$ une base de $\operatorname{Im} f$ telle que, pour tout $k \leq s$, $f'(e_k) \in \operatorname{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$. On la complète en une base de E, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. D'après la question 1.d), $\mathcal{B}$ vérifie la propriété voulue.
Donc on a démontré l'hypothèse de récurrence au rang n.

3. La k-ième colonne de f est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_k))$. Puisque $f(e_k) \in \text{Vect}\{e_1, ..., e_{k-1}\}$, il existe $\lambda_{1,k}, ..., \lambda_{k-1,k} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(e_k) = \lambda_{1,k}e_1 + ... + \lambda_{k-1,k}e_{k-1} = \lambda_{1,k}e_1 + ... + \lambda_{k-1,k}e_{k-1} + 0.e_k + ... + 0.e_n$$

Donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f(e_k)) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,k} \\ \vdots \\ \lambda_{k-1,k} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{1,2} & ... & \lambda_{1,n} \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & & ... & 0 \end{pmatrix}$$