Université Pierre et Marie Curie — Le 22 mars 2013
LM125

Contrôle continu : algèbre linéaire

Exercice 1 : [Question de cours] [2,5]

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille d'éléments de E. Donner la définition du fait que $(e_1, ..., e_n)$ soit une famille génératrice.

2. Montrer que, si E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ est une application linéaire, l'image d'une famille génératrice finie de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 2 : [8,5]

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tq } \begin{cases} 2b + 3c = 0 \\ -2a + 5c + 2d = 0 \\ -3a - 5b + 3d = 0 \end{cases} \right\}$.

1. a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Calculer une base de E.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

b) On note M_1 et M_2 les deux premiers éléments de la base trouvée à la question 1.b). Calculer $B^{-1}M_1B$ et $B^{-1}M_2B$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer M_1^n et M_2^n.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On définit une fonction f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \to & CA - AC \end{array}$$

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f$.

c) À l'aide du théorème du rang et du résultat de la question 1.b), calculer le rang de f.

Exercice 3 : [6]

Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (w, x, y, z) & \to & (w + y + 2z,\ -x + 3y - 2z,\ w - 3x + 2y - 4z,\ w + x - 3y + 4z) \end{array}$$

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (c'est-à-dire $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1)$).

1. a) Calculer $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

2. a) Montrer que $(2, 2, 0, -1)$ appartient à $\operatorname{Im} f$.

b) Montrer que $(2, 2, 0, -1)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

c) $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 4 : [5]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de type fini. On note d la dimension de E.
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f^n la composée de f avec lui-même n fois :

$$f^n = \overbrace{f \circ f \circ ... \circ f}^{n \text{ fois}}$$

Par convention, on prend $f^0 = \mathrm{Id}_E$.
On dit que f est *nilpotent* s'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$ (c'est-à-dire tel que f^n est la fonction nulle : $f^n(x) = 0$ pour tout $x \in E$).
Dans tout l'exercice, on suppose que f est nilpotent et on note n_0 le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $f^{n_0} = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que $n_0 \leq d$.

1. a) Que vaut $\operatorname{Ker} f^{n_0}$?

b) Montrer que, pour tout $k \in \{0, ..., n_0 - 1\}$, $\operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{n_0}$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose dans cette question que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

a) Montrer que, pour tout $m \geq 0$ et tout $x \in E$, $f^{k+1+m}(x) = 0$ si et seulement si $f^{k+m}(x) = 0$.
[Indication : utiliser le fait que $f^{k+1+m} = f^{k+1} \circ f^m$.]

b) Montrer que, pour tout $m \geq 0$, $\operatorname{Ker} f^{k+m} = \operatorname{Ker} f^k$.

4. a) À l'aide des questions 3. et 1.b), montrer que, pour tout $k \in \{0, ..., n_0 - 1\}$, $\operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

b) Montrer que $0 = \dim(\operatorname{Ker} f^0) < \dim(\operatorname{Ker} f^1) < ... < \dim(\operatorname{Ker} f^{n_0}) = d$.

c) En déduire que $n_0 \leq d$.