Correction partielle du contrôle continu du 22 mars

Exercice 1 :

1. On dit que $(e_1, ..., e_n)$ est <u>génératrice</u> si, pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$.
Une formulation équivalente est de dire que tout élément $x \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $e_1, e_2, ..., e_n$.

2. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille génératrice d'éléments de E. Il faut montrer que $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Il faut donc montrer que, pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $x = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$: c'est la définition du fait que $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est génératrice.

Soit $x \in \operatorname{Im} f$ quelconque. Puisque x appartient à l'image de f, il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ (c'est la définition de $\operatorname{Im} f$: un élément x appartient à $\operatorname{Im} f$ si et seulement si il est de la forme $f(y)$ pour un certain y).
Puisque $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice de E, il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$.
Alors :

$$x = f(y) = f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$$

La dernière égalité est dûe au fait que f est linéaire.
On a donc bien montré l'existence de $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 f(e_1) + ... + \lambda_n f(e_n)$.

Exercice 2 :

1. a) Pour montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, le plus simple est de montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Comme on sait, d'après le cours, que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, cela impliquera que E est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Il faut vérifier les trois propriétés suivantes :
- E est non-vide.
- Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, alors $\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

...

<u>Attention à ne pas oublier le début</u> : $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Il faut calculer une base d'un espace vectoriel défini comme l'ensemble des solutions d'un certain système d'équations.

<u>Commençons par résoudre le système d'équations.</u>
La matrice augmentée associée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Appliquons-lui l'algorithme de Gauss.

[Puisque le premier coefficient de la première colonne est nul, penser à échanger les deux premières lignes. Ce n'est pas la seule façon de faire mais les autres sont plus longues.]

$L_1 \leftrightarrow L_2$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1/2$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -15/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2/2$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow -L_1/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $L_2 \leftarrow L_2/2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice échelonnée réduite associée est donc $U_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme elle n'a pas de ligne de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$, il y a au moins une solution (on le savait déjà, d'ailleurs, puisqu'on a montré à la question précédente que E était non-vide).
Il y a des pivots dans les colonnes 1 et 2. Les variables a et b sont donc essentielles, c et d sont libres. Nous allons donc résoudre le système en fonction des valeurs de c et d.
Les solutions du système sont les (a, b, c, d) vérifiant $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-5c/2-d \\ b+3c/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 5c/2 - d = 0 \\ b + 3c/2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5c/2 + d \\ b = -3c/2 \end{cases}$$

Les solutions sont donc les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 5/2c+d & -3/2c \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c, d \in \mathbb{R}$.

On récrit maintenant E en « séparant » les variables c et d, de façon à trouver une famille génératrice.

$$\begin{aligned} E &= \left\{ \begin{pmatrix} 5/2c+d & -3/2c \\ c & d \end{pmatrix} \text{ tq } c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 5/2c & -3/2c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ tq } c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tq } c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est donc une famille génératrice de E.

Montrons que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre. Dans ce cas, elle sera à la fois libre et génératrice de E : ce sera une base de E.
Il faut montrer que, si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Si $\lambda_1 \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2\lambda_1+\lambda_2 & -3/2\lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

En regardant seulement la deuxième ligne, on obtient $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.
Donc la famille est libre. C'est bien une base de E.

Remarque : comment vérifier que les calculs précédents ne sont pas entièrement faux ?
On a dit que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ était une base de E. Cela implique en particulier que les matrices $\begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des éléments de E. Elles doivent donc vérifier les équations qui définissent E. Vérifions que c'est bien le cas.

Pour $\left(\begin{smallmatrix} 5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$:

$$2.(-3/2)+3.1=0 \qquad -2.(5/2)+5.1+2.0=0 \qquad -3.(5/2)-5.(-3/2)+3.0=0$$

Pour $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$2.0+3.0=0 \qquad -2.1+5.0+2.1=0 \qquad -3.1-5.0+3.1=0$$

3. b) Par définition du noyau, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ si et seulement si $f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)=0$. Puisqu'on veut calculer $\operatorname{Ker} f$, le plus logique est donc de commencer par calculer $f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) &= C\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)C \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} 5a-3c & 5b-3d \\ 2a & 2b \end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix} 5a+2b & -3a \\ 5c+2d & -3c \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} -2b-3c & 3a+5b-3d \\ 2a-5c-2d & 2b+3c \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc $f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)=0$ si et seulement si :

$$\left(\begin{smallmatrix} -2b-3c & 3a+5b-3d \\ 2a-5c-2d & 2b+3c \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

ce qui est la même chose que de dire que le système d'équations suivant est vérifié :

$$\left\{\begin{array}{c} -2b-3c=0 \\ 3a+5b-3d=0 \\ 2a-5c-2d=0 \\ 2b+3c=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2b+3c=0 \\ -2a+5c+2d=0 \\ -3a-5b+3d=0 \end{array}\right.$$

On a donc démontré que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{c} 2b+3c=0 \\ -2a+5c+2d=0 \\ -3a-5b+3d=0 \end{array}\right.$$

Mais il s'agit exactement du système d'équations qui définit E. On a donc démontré que $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in E$. Cela revient à dire que $E=\operatorname{Ker} f$.

c) L'application f est linéaire et son espace de départ est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après le théorème du rang :

$$\operatorname{rang}(f)+\dim(\operatorname{Ker} f)=\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$$

$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))=4$
À la question 1.b), la base de E qu'on a trouvée contenait deux éléments. Donc $\dim E=2$.
Donc $\operatorname{rang}(f)+2=4$, c'est-à-dire $\operatorname{rang}(f)=2$.

Exercice 3 :

1. a) $f(e_1) = (1,0,1,1), f(e_2) = (0,-1,-3,1), f(e_3) = (1,3,2,-3), f(e_4) = (2,-2,-4,4)$

b) La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ (car c'est une base) donc $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$:
[C'est une propriété du cours, voir l'exercice 1. Attention, $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est seulement une famille génératrice. A priori, ce n'est pas une base ; ce n'est en fait une base que si f est injective.]

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (1,3,2,-3), (2,-2,-4,4)\}$$

On définit la matrice A dont les lignes sont les vecteurs de la famille génératrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

On lui applique l'algorithme de Gauss en s'arrêtant dès que la matrice est échelonnée.

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes ne change pas l'espace vectoriel engendré par les lignes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (1,3,2,-3), (2,-2,-4,4)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (0,0,-8,-1), (0,0,0,0)\} \\ &= \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (0,0,-8,-1)\} \end{aligned}$$

La famille $\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (0,0,-8,-1)\}$ est donc génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Montrons que $\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (0,0,-8,-1)\}$ est une famille libre. Ainsi, elle sera à la fois libre et génératrice de $\operatorname{Im} f$: ce sera une base de $\operatorname{Im} f$.

Il faut montrer que si $\lambda_1(1,0,1,1) + \lambda_2(0,-1,-3,1) + \lambda_3(0,0,-8,-1) = 0$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Supposons que $\lambda_1(1,0,1,1) + \lambda_2(0,-1,-3,1) + \lambda_3(0,0,-8,-1) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) &= \lambda_1(1,0,1,1) + \lambda_2(0,-1,-3,1) + \lambda_3(0,0,-8,-1) \\ &= (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1 - 3\lambda_2 - 8\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

En regardant les deux premières coordonnées, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. En regardant la troisième coordonnée, $0 - 3.0 - 8\lambda_3 = 0$, c'est-à-dire $\lambda_3 = 0$.

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille $\{(1,0,1,1), (0,-1,-3,1), (0,0,-8,-1)\}$ est libre. C'est donc une base de $\operatorname{Im} f$.

Remarque : on a trouvé que $\mathrm{Im}\, f$ avait une base à trois éléments, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension 3. On a donc en particulier calculé le rang de f : $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$.
De façon générale, si on vous demande de calculer le rang d'une application linéaire f, il suffit de calculer une base de son image. Cela vous donnera la dimension de $\mathrm{Im}\, f$ et donc le rang de l'application.

2. a) Première méthode : $(2, 2, 0, -1)$ appartient à $\mathrm{Im}\, f$ si et seulement si il existe $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f((w, x, y, z)) = (2, 2, 0, -1)$. Cela revient à dire qu'il faut qu'il existe $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{cases} w + y + 2z = 2 \\ -x + 3y - 2z = 2 \\ x - 3x + 2y - 4z = 0 \\ w + x - 3y + 4z = -1 \end{cases}$$

On résoud le système (par l'algorithme de Gauss) et on voit qu'il admet au moins une solution. Donc il existe au moins un $(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ tel que $f((w, x, y, z)) = (2, 2, 0, -1)$.

Deuxième méthode : À la question précédente, on a vu que $\{(1, 0, 1, 1), (0, -1, -3, 1), (0, 0, -8, -1)\}$ était une base de $\mathrm{Im}\, f$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \mathrm{Vect}\ \{(1, 0, 1, 1), (0, -1, -3, 1), (0, 0, -8, -1)\} \\ &= \{\lambda_1(1, 0, 1, 1) + \lambda_2(0, -1, -3, 1) + \lambda_3(0, 0, -8, -1) \text{ tq } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Donc pour montrer que $(2, 2, 0, -1)$ appartient à $\mathrm{Im}\, f$, il suffit de montrer que $(2, 2, 0, -1)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(1, 0, 1, 1), (0, -1, -3, 1), (0, 0, -8, -1)$. Autrement dit, il faut trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} (2, 2, 0, -1) &= \lambda_1(1, 0, 1, 1) + \lambda_2(0, -1, -3, 1) + \lambda_3(0, 0, -8, -1) \\ &= (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1 - 3\lambda_2 - 8\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

En regardant les deux premières coordonnées, on voit qu'il faut avoir $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$. En regardant la quatrième coordonnée, on trouve $-1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 2 - 2 - \lambda_3 = -\lambda_3$ donc $\lambda_3 = 1$.
On vérifie qu'on a bien :

$$2(1, 0, 1, 1) + (-2)(0, -1, -3, 1) + 1.(0, 0, -8, -1) = (2, 2, 0, -1)$$

Donc $(2, 2, 0, -1)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la base de $\mathrm{Im}\, f$. C'est donc un élément de $\mathrm{Im}\, f$.

b) $f((2, 2, 0, -1)) = (2 + 0 - 2, -2 + 0 + 2, 2 - 6 + 4, 2 + 2 - 4) = (0, 0, 0, 0)$ donc, par définition du noyau, $(2, 2, 0, -1) \in \mathrm{Ker}\, f$.

c) Rappel : $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f = \mathbb{R}^4$.
Or $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$: $(2, 2, 0, 1) \in \mathrm{Im}\, f$ (d'après la question 2.a)) et $(2, 2, 0, 1) \in \mathrm{Ker}\, f$ (d'après la question 2.b)) donc $(2, 2, 0, 1) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f$.
Donc $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ ne sont pas supplémentaires.