Université Pierre et Marie Curie Le 28 février 2013
LM125

Contrôle continu : algèbre linéaire

Exercice 1 : [Question de cours] [1,5]
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels de E. Donner la définition de $F_1 + F_2$ et démontrer que $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 : [5]
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que B est inversible et calculer B^{-1}.
2. Calculer $B^{-1}AB$. En déduire qu'il existe une matrice D diagonale telle que $A = BDB^{-1}$. Préciser la valeur de D.
3. Calculer A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3 : [5]
Pour chacun des deux systèmes d'équations suivants, déterminer s'il a ou non des solutions et calculer la ou les éventuelles solutions.
1.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = -1 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2 \end{cases}$$

Exercice 4 : [4,5]
1. Montrer que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } f(0) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pour les opérations usuelles).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } AB = BA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : [4]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Soient M_1, M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M_1 a une ligne nulle, alors M_1M_2 aussi.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que M n'a pas de ligne nulle.

2. Le but de cette question est de montrer que si A, B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB = I_n$, alors $BA = I_n$. Soient donc $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconques telles que $AB = I_n$.
On rappelle que, d'après l'algorithme de Gauss, il existe $M_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $U_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ échelonnée réduite telles que $M_A A = U_A$.
a) Montrer que $M_A = U_A B$.
b) En utilisant les questions 1.a) et 1.b), ainsi que l'inversibilité de M_A, montrer que U_A n'a pas de ligne nulle.
c) Montrer que chaque ligne de U_A contient un pivot, puis que $U_A = I_n$.
d) Montrer que $BA = I_n$.

Exercice 6 : [Bonus]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tous différents. On note D la matrice diagonale suivante :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec D (c'est-à-dire telles que $AD = DA$).