Université Pierre et Marie Curie Le 28 février 2013
LM125

Contrôle continu : algèbre linéaire

Corrigé

Exercice 1 :

$F_1 + F_2 = \{u + v \text{ tq } u \in F_1, v \in F_2\}$

$F_1 + F_2$ est un sous-ensemble de E, puisque, pour tous $u \in F_1, v \in F_2$, $u + v$ est la somme de deux éléments de E et est donc également un élément de E. Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E.

- $F_1 + F_2 \neq \emptyset$: puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels, $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ donc $0_E = O_E + O_E \in F_1 + F_2$.

- $F_1 + F_2$ est stable par addition : il faut montrer que, si w et w' sont des éléments de $F_1 + F_2$, alors $w + w'$ est aussi un élément de $F_1 + F_2$. Si w, w' sont des éléments de $F_1 + F_2$, il existe u, u' des éléments de F_1 et v, v' des éléments de F_2 tels que $w = u + v$ et $w' = u' + v'$. Alors, $w + w' = (u + u') + (v + v')$ et est donc un élément de $F_1 + F_2$ car $u + u' \in F_1$ et $v + v' \in F_2$, puisque F_1 et F_2 sont stables par addition.

- $F_1 + F_2$ est stable par multiplication par un scalaire : si $w \in F_1 + F_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors w est de la forme $w = u + v$ avec $u \in F_1$ et $v \in F_2$, donc $\lambda w = \lambda u + \lambda v$. Puisque F_1 et F_2 sont stables par multiplication par des scalaires, $\lambda u \in F_1$ et $\lambda v \in F_2$ donc $\lambda w \in F_1 + F_2$.

Exercice 2 :

1. Appliquons à B l'algorithme de Gauss.

$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, \begin{pmatrix} 1&0&0\\2&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&-1&2\\0&1&0\\-1&2&-4 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\1&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&-1&2\\0&1&0\\0&1&-2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&-1&2\\0&1&0\\0&0&-2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow -L_3/2, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&-1&2\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3, \begin{pmatrix} 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2, \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

La matrice échelonnée réduite qu'on obtient est l'identité. La matrice B est donc inversible et son inverse est donnée par :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\1&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0\\2&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&1\\2&1&0\\1/2&1/2&-1/2 \end{pmatrix}$$

2. $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2&0&1\\2&1&0\\1/2&1/2&-1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2&1&-1\\-2&-1&2\\-2&-2&3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-1&2\\-2&3&-4\\-1&2&-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&0&1\\2&1&0\\1/2&1/2&-1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&-1&4\\-2&3&-8\\-1&2&-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&2 \end{pmatrix}$

Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice qu'on vient d'obtenir. Cette matrice est diagonale et $A = BB^{-1}ABB^{-1} = BDB^{-1}$.

3. $A^n = BD^nB^{-1}$

De plus, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2^n/2 & 2^n/2 & -2^n/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & -2^n+1 \\ 2-2.2^n & 3-2.2^n & -2+2.2^n \\ 2-2.2^n & 2-2.2^n & -1+2.2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & -2^n+1 \\ 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} & -2+2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. La matrice augmentée associée au système est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons la matrice échelonnée réduite associée à $\tilde{A}$.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice échelonnée réduite associée au système est I_4. Cette matrice contient la ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il n'y a donc pas de solution.

2. La matrice échelonnée réduite associée au système est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons par l'algorithme de Gauss la matrice échelonnée réduite associée.

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
La matrice échelonnée réduite associée au système est $U_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice ne contient pas de ligne de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta \neq 0$. Il y a donc au moins une solution au système.
Les variables essentielles sont x_1, x_2, x_4 (car les pivots se trouvent dans les colonnes $1, 2$ et 4). Les variables x_3 et x_5 sont libres. Il y a une infinité de solutions. Calculons-les.
Les solutions du système sont les quintuplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tels que :

$$U_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Cette égalité matricielle est équivalente à $\begin{pmatrix} x_1+2x_3 \\ x_2-x_3+2x_5+2 \\ x_4+x_5-1 \end{pmatrix} = 0$. Les solutions sont donc exactement les quintuplets tels que :

$$x_1 = -2x_3$$
$$x_2 = x_3 - 2x_5 - 2$$
$$x_4 = -x_5 + 1$$

Les solutions sont donc l'ensemble $\{(-2x_3, x_3 - 2x_5 - 2, x_3, -x_5 + 1, x_5) \text{ tq } x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$.
Exercice 4 :

1. Notons $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } f(0) = 0\}$. Cet ensemble est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (d'après le cours). Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; cela impliquera qu'il est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- E est non-vide : il contient la fonction nulle $f : x \to 0$.
- E est stable par addition : si $f_1, f_2 \in E$, $(f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0 + 0 = 0$ donc $f_1 + f_2 \in E$.
- E est stable par multiplication par un scalaire : si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda.0 = 0$ donc $\lambda f \in E$.

2. Notons $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } AB = BA\}$. Cet ensemble est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- E est non-vide : $0 \in E$ puisque $0.B = 0 = B.0$. (Ici, 0 désigne la matrice nulle de taille $n \times n$.)
- E est stable par addition : si $A_1, A_2 \in E$, $(A_1+A_2)B = A_1B+A_2B = BA_1+BA_2 = B(A_1+A_2)$ donc $A_1 + A_2 \in E$.
- E est stable par multiplication par un scalaire : si $A \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda BA = B(\lambda A)$.

3. Notons E cet ensemble. S'il s'agissait d'un sous-espace vectoriel, il serait stable par multiplication par un scalaire. Montrons que ce n'est pas le cas.

Soit f la fonction constante égale à 1 (c'est-à-dire $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Cette fonction appartient bien à E puisque $1 \geq 0$. Soit $\lambda = -1$. Alors λf est la fonction constante égale à -1 (c'est-à-dire $f(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Elle n'appartient pas à E puisque $-1 < 0$. Donc E n'est stable par multiplication par un scalaire.

Exercice 5 :

1. a) Supposons que la k-ème ligne de M_1 est nulle. Alors la k-ème ligne de M_1M_2 est aussi nulle. En effet, pour tout $l \in \{1, ..., n\}$:

$$(M_1M_2)_{k,l} = \sum_{s=1}^{n} (M_1)_{k,s}(M_2)_{s,l}$$

Puisque la k-ème ligne de M_1 est nulle, $(M_1)_{k,s} = 0$ pour tout $s \in \{1, ..., n\}$. Donc $(M_1M_2)_{k,l}$ est une somme de termes nuls et $(M_1M_2)_{k,l} = 0$.

b) Si M avait une ligne nulle, alors, d'après la première question, MM^{-1} aurait également une ligne nulle, ce qui est impossible car $MM^{-1} = I_n$ et la matrice identité n'a pas de ligne nulle.

2. a) $U_AB = (M_AA)B = M_A(AB) = M_AI_n = M_A$

b) Si U_A avait une ligne nulle, $M_A = U_AB$ aurait aussi une ligne nulle, d'après la question 1.a), appliquée à $M_1 = U_A$ et $M_2 = B$. Or M_A est inversible. Donc, d'après la question 1.b), M_A n'a pas de ligne nulle. Donc U_A n'a pas de ligne nulle.

c) Aucune ligne de U_A n'est nulle, d'après la question précédente. Chaque ligne non-nulle contient alors un pivot car par définition, un pivot est le premier terme non-nul d'une ligne, s'il existe (et il existe donc dès que la ligne contient au moins un terme non-nul, c'est-à-dire dès que la ligne est non-nulle).
Notons $l_1, l_2, ..., l_n$ les positions des pivots de chaque ligne (c'est-à-dire que le pivot de la première ligne est sur la colonne l_1, le pivot de la deuxième ligne sur la colonne l_2 etc.). Puisque la matrice U_A est échelonnée, $l_1 < l_2 < ... < l_n$: chaque pivot est strictement à droite du pivot de la ligne précédente.
On a $l_1 \geq 1$. Puisque $l_2 > l_1$, $l_2 \geq 2$. De même, $l_3 \geq 3$ etc. On a donc, par récurrence, $l_k \geq k$ pour tout $k \leq n$.
De plus, $l_n \leq n$ (il n'y a que n colonnes dans la matrice U_A). Puisque $l_{n-1} < l_n$, $l_{n-1} \leq n - 1$ etc. Donc, pour tout $k \leq n$, $l_k \leq k$.
Puisque $k \leq l_k \leq k$, $l_k = k$ pour tout k. Les pivots sont donc situés sur la diagonale. Tous les termes à gauche de la diagonale sont nuls (car les pivots sont les premiers termes non-nuls de leur ligne) et tous les termes au-dessus de la diagonale sont nuls (car U_A est échelonnée réduite donc aucun terme au-dessus d'un pivot n'est non-nul). De plus, les termes de la diagonale valent tous 1 (car ils sont en position de pivot et U_A est réduite). Donc $U_A = I_n$.

d) D'après les questions a) et c), $M_A = I_nB = B$. Puisque $M_AA = U_A = I_n$, $BA = I_n$.

Exercice 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons AD et DA.

Pour tous $k, l \leq n$:

$$(AD)_{k,l} = \sum_{s=1}^{n} A_{k,s} D_{s,l}$$

L'élément $D_{s,l}$ est toujours nul, sauf si $s = l$, auquel cas il vaut λ_s. Donc $(AD)_{k,l} = A_{k,l} D_{l,l} = \lambda_l A_{k,l}$.
De même :

$$(DA)_{k,l} = \sum_{s=1}^{n} D_{k,s} A_{s,l} = D_{k,k} A_{k,l} = \lambda_k A_{k,l}$$

On a alors $AD = DA$ si et seulement si, pour tous $k, l \leq n$, $(AD)_{k,l} = (DA)_{k,l}$, soit $\lambda_l A_{k,l} = \lambda_k A_{k,l}$.
Si $k = l$, la condition $\lambda_l A_{k,l} = \lambda_k A_{k,l}$ est vérifiée quelle que soit la valeur de $A_{k,l}$ puisqu'alors $\lambda_k = \lambda_l$.
En revanche, si $k \neq l$, la condition $\lambda_l A_{k,l} = \lambda_k A_{k,l}$ est vérifiée si et seulement si $A_{k,l} = 0$. En effet, elle est équivalente à $(\lambda_l - \lambda_k) A_{k,l}$ et on a supposé que les λ_s étaient tous différents, c'est-à-dire que $\lambda_l - \lambda_k \neq 0$ si $l \neq k$.
Donc $AD = DA$ si et seulement si $A_{k,l} = 0$ pour tous k et l différents, c'est-à-dire si et seulement si A est diagonale.