Feuille d'exercices n^{o}1

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit (X,d) un espace métrique. Pour tous $x \in X, \epsilon > 0$, on note :

$$B(x,\epsilon) = \{y \in X \text{ tq } d(x,y) < \epsilon\}$$

a) Montrer que, pour tous $x \in X$, $\epsilon > 0$, $\overline{B(x,\epsilon)} \subset \{y \in X \text{ tq } d(x,y) \leq \epsilon\}$.
b) Dans cette question et la suivante, on suppose que d est la distance discrète sur X :

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \quad \text{si } x = y \\ &= 1 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Montrer que tous les sous-ensembles de X sont fermés pour d.
c) On suppose que X a au moins deux éléments. Montrer que, pour tout $x \in X$:

$$\overline{B(x,1)} \neq \{y \in X \text{ tq } d(x,y) \leq 1\}$$

2. Soient X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$c_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y) \qquad \forall x, y \in X$$

a) Montrer que, si d_1 et d_2 sont équivalentes, elles engendrent la même topologie sur X.
b) Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

3. Soient X un ensemble fini et $\mathcal{T}$ une topologie séparée sur X. Que peut-on dire de $\mathcal{T}$?

4. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. On suppose que Xet Y sont d'intersection vide. Existe-t-il nécessairement une métrique D sur $X \cup Y$ telle que la métrique induite par D sur X soit d et la métrique induite par D sur Y soit δ ?

Exercice 2 : espaces l^p, $1 \leq p < \infty$.
Pour tout $p \in [1,+\infty[$, on note :

$$l^p = \left\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p < +\infty \right\},$$

et pour toute suite $u \in l^p$, on définit $\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}$.

1. Vérifier que $(l^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

2. Le but est maintenant de montrer que, plus généralement, $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour $p \in [1, +\infty[$.
a) Montrer que pour tous $a, b > 0$ et tous $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) [Inégalité de Hölder] En déduire que pour $u \in l^p$ et $v \in l^q$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

c) En déduire l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$. Conclure.
[Indication : On pourra penser à écrire la majoration $|u_k + v_k|^p \leq (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1}$.]

Exercice 3 : norme de Schatten

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n.
[Rappel : si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $G \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $G^{-1}MG$ est diagonale.]
Soit $p \in [1; +\infty[$. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque. Soient $\lambda_1(M), ..., \lambda_n(M)$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicité). On pose :

$$N_p(M) = ||(\lambda_1(M), ..., \lambda_n(M))||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(M)|^p \right)^{1/p}$$

1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{diag}(A)$ le n-uplet $(A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn})$.
Montrer que $N_p(M) = \sup_{U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} ||\mathrm{diag}(U^{-1}MU)||_p$.
2. Montrer que N_p est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 : Distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$

Soit n un entier. On note d la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non-vides de $\mathbb{R}^n$. Étant donné un compact $K \in \mathcal{K}$, on note $\phi_K : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ la fonction « distance à K » définie par :

$$\phi_K(y) = \inf_{x \in K} d(x, y).$$

Étant donnés deux éléments K_1, K_2 de $\mathcal{K}$, on note :

$$\delta(K_1, K_2) = \|\phi_{K_1} - \phi_{K_2}\|_\infty$$

1. Montrer que δ définit une distance sur $\mathcal{K}$. C'est la *distance de Hausdorff*.
Est-il vrai que δ définit également une distance sur l'ensemble des parties non-vides de $\mathbb{R}^n$?

2. Pour tout compact $K \in \mathcal{K}$ et tout réel $\epsilon > 0$, on note

$$V_\epsilon(K) = \bigcup_{x \in K} \overline{B(x,\epsilon)}$$

où $B(x,\epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ dans $(\mathbb{R}^n, d)$. Montrer que, étant donnés deux compacts $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, on a $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$ si et seulement si $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

3. Soit $\mathcal{K}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ constitué des parties finies de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{K}_0$ est dense dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

Exercice 5 : Distance SNCF

Soit $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour toute paire de points $x, y \in \mathbb{R}^2$, on note

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^2$.

2. Décrire géométriquement la boule ouverte de centre x et de rayon r, pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ quelconque.

3. La topologie induite par d est-elle plus fine ou moins fine que la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$?

4. Quelle est la distance induite par d sur le cercle unité ?

5. Quelles similitudes directes sont continues pour d ?
[Indication : Montrer que si une similitude directe s est continue pour d, l'image par s d'une droite passant par 0 est une droite passant par 0.]

6. Montrer que $(\mathbb{R}^2, d)$ n'est pas normable.

Exercice 6 : théorème de plongement d'Arens-Fells

Soit (X, d) un espace métrique.
On va montrer qu'il existe (V, N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $F \subset V$ un fermé de V tel que (X, d) et (F, N) sont isométriques.

1. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X et $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On fixe un point $a \in X$, et, pour chaque $x \in X$, on définit :

$$f_x : A \in \mathcal{F} \ \mapsto d(x, A) - d(a, A).$$

a) Montrer que, pour tout x, $f_x \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$.
b) Montrer que l'application $x \to f_x$ est une isométrie.
c) En déduire le résultat voulu.

2. [Long et un peu technique; seulement si vous vous ennuyez]
Trouver une construction plus directe de (V, N) et de F.